Wirtschafts- und Finanzmather

für Betriebswirtschaft und International Management

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2016/17					
Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	05.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	9.50-11.20	W1.04	18.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	11.30-13.00	W1.10	18.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W2.10	11.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W2.14	12.10.2016
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.02	12.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	?	13.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	14.00-15.30	W4.04	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	12.15-14.00	W2.14	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.00-15.30	W2.14	13.10.2016
Offener Matheraum	Müller/Jansen	Mo	9.30-13.00	B3.05	31.10.2016
Offener Matheraum	Hienz/Etschberger	Di	13.00-16.30	B3.05	08.11.2016
Offener Matheraum	Geisbüsch/Werdich/Etschberger	Do	11.30-13.45	B3.05	27.10.2016
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2017					
Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	04.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	13.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	13.10.2016
Statistik Tutorium	Jansen	Mi	14.00-15.30	W1.06	12.10.2016

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Beweis einer Aussage in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion

gegeben: Aussagen A_n
Aufgabe: Zeige, dass A_n wahr ist für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Beweis: ① Suche möglichst kleines n, so dass A_n wahr ist (Induktionsanfang)

$A_1 \checkmark \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad \dots \quad A_n \dots$

[z.B. $A_n: n^2 > 5n$

$A_1: 1^2 > 5\cdot 1$ ↯ falsch
$A_2: 2^2 > 5\cdot 2$ ↯ falsch
$A_3: 3^2 > 5\cdot 3$ f
$A_4: 4^2 > 5\cdot 4$ f
$A_5: 5^2 > 5\cdot 5$ f
$A_6: 6^2 > 5\cdot 6$ ✓ wahr]

② Induktionsschritt $n \to n+1$
- Annahme: A_n ist wahr
- Zeige: Wenn A_n wahr, dann auch A_{n+1} wahr

[Bsp. $A_n: n^2 > 5n$ (① Anfang: gilt für $n=6$)

② zu zeigen: $A_n \overset{!}{\Rightarrow} A_{n+1}$

$n^2 > 5n \overset{!}{\Rightarrow} (n+1)^2 > 5(n+1)$

linke S. von A_n (A_n^L) r.S. von A_n (A_n^R) linke Seite von A_{n+1} (A_{n+1}^L) rechte Seite von A_{n+1} (A_{n+1}^R)

$\underbrace{(n+1)^2}_{A_{n+1}^L} = n^2 + 2n + 1$

$= \underbrace{n^2}_{A_n^L} + 2n + 1 > \underbrace{5n}_{A_n^R} + 2n + 1$ (Induktionsvoraussetzung)

$> 5n + 5 = \underbrace{5(n+1)}_{A_{n+1}^R}$ (für $n \geq 6$)

Beispiel: $A_n: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$ (zu zeigen)

mit vollst. Induktion

① $A_1: \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$ ✓

② Ind. schritt: $n \to n+1$ [A_{n+1}: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} i}_{A_{n+1}^L} = \underbrace{\frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)}_{A_{n+1}^R}$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} i}_{A_{n+1}^L} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{A_n^L} + (n+1) = \underbrace{\frac{1}{2} n(n+1)}_{A_n^R} + (n+1)$ (Ind. voraus-setzung)

$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1$
$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
$= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) = \underbrace{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}_{A_{n+1}^R}$

Beispiel: $A_n: \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ (zu zeigen)

mit vollst. Induktion

① $A_1: \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 (1+1)(2\cdot 1+1)$ ✓

(Ind. anfang)

② $n \to n+1$ $\left[A_{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1) \right]$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [(n^2+n)(2n+1) + 6 \cdot (n^2+2n+1)]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [2n^3+2n^2+n^2+n + 6n^2+12n+6]$$

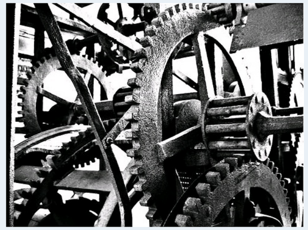
$$= \frac{1}{6} \cdot [2n^3+9n^2+13n+6]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [2n^3+6n^2+4n + 3n^2+9n+6]$$

$$= \frac{1}{6} (n^2+3n+2)(2n+3)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)$$

Begriffe



- Axiom: Grundsachverhalt als Ausgangspunkt, wird nicht bewiesen
- Definition: Sachverhalt, wird durch neuen Begriff beschrieben, bezieht sich auf bereits Definiertes oder auf Axiome
- Aussage (math. Satz): Formulierung auf Basis bisherigen Wissens, wird als wahr oder falsch identifiziert.
- Aussagenverknüpfungen: Negation ($\overline{A}$), Konjunktion ($A \wedge B$), Disjunktion ($A \vee B$), Implikation ($A \Rightarrow B$), Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$)
- Tautologie: Verknüpfte, stets wahre Aussage
- Kontradiktion: Verknüpfte, stets falsche Aussage
- Allaussage:

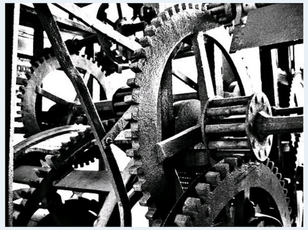
$$A(1) \wedge A(2) \ldots \quad = \quad \bigwedge_x A(x) \ (\text{für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \forall\, x: \ A(x)$$

„für alle"

- Existenzaussage:

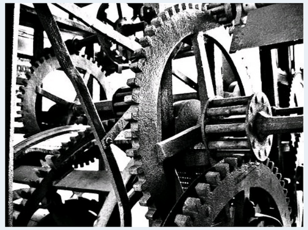
$$A(1) \vee A(2) \ldots \quad = \quad \bigvee_x A(x) \ (\text{für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \exists\, x: \ A(x)$$

„Es existiert mindestens ein ..."



Wahrheitswerte aller möglichen Verknüpfungen der Aussagen A und B

A	w	w	f	f	
B	w	f	w	f	
1)	w	w	w	w	Verknüpfung ist stets wahr
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
3)	w	w	w	f	Disjunktion $A \vee B$
4)	w	w	f	w	Implikation $B \Rightarrow A$
5)	w	f	w	w	Implikation $A \Rightarrow B$
6)	f	w	w	w	Negierte Konjunktion $\overline{A \wedge B}$
7)	w	f	f	f	Konjunktion $A \wedge B$
8)	f	w	f	f	Negierte Implikation $\overline{A \Rightarrow B}$
9)	f	f	w	f	Negierte Implikation $\overline{B \Rightarrow A}$
10)	f	f	f	w	Negierte Disjunktion $\overline{A \vee B}$
11)	w	f	f	w	Äquivalenz $A \iff B$
12)	f	w	w	f	Negierte Äquivalenz $\overline{A \iff B}$
13)	f	w	f	w	Negation $\overline{B}$
14)	f	f	w	w	Negation $\overline{A}$



- Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ (analog Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$):

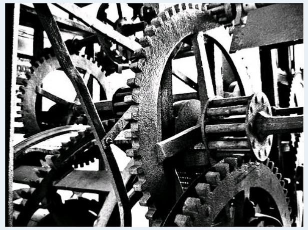
$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

- Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion für Allaussagen
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für kleinstmöglichen Wert von n (oft $n = 0$ oder $n = 1$)
  - Induktionsvoraussetzung: Annahme, dass die Aussage für n wahr ist
  - Induktionsschluss: Beweis (unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung), dass die Aussage auch für $n + 1$ gültig ist
- Beispiel (vollst. Induktion): $A(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\ ; n \in \mathbb{N}$
  - Ind.-Anfang: $n = 1 : \sum_{i=1}^{1} i = 1 \quad = \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
  - Ind.-Schluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel



- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

$$\text{Gewinn} \quad = \quad \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

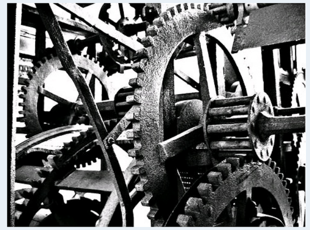
- Daraus:

A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:

Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel



- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

$$\text{Gewinn} = \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

- Daraus:

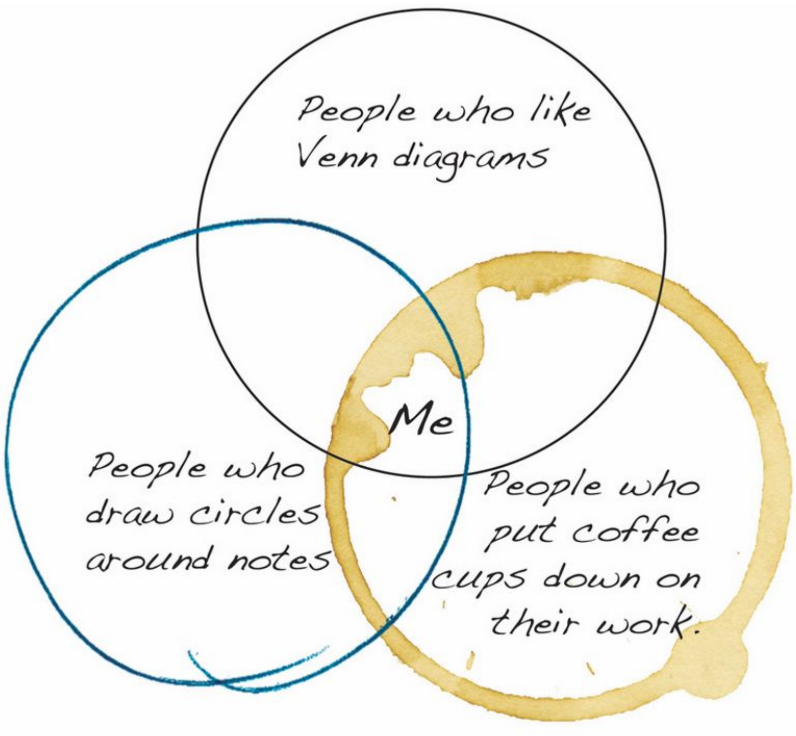
  A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
  B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:

- Für zwei Produkte gegeben:
  - Umsätze $u_1 = 2, u_2 = 5$
  - Kosten $c_1 = 1, c_2 = 4$
- Dann ist $g_1 = u_1 - c_1 = 2 - 1 = 1 = u_2 - c_2 = 5 - 4 = g_2$, aber $u_1 \neq u_2$, $c_1 \neq c_2$.

Gliederung



3 Mengen

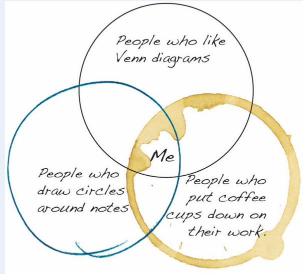
- Grundlagen
- Beziehungen zwischen Mengen
- Relationen

Warum Mengen?

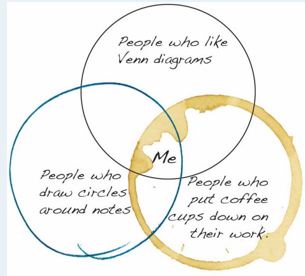
- Mengen sind natürliche Betrachtungsgegenstände in den Wirtschaftswissenschaften:
  - Kundensegmente
  - Produktgruppen
  - Handlungsalternativen
  - etc.
- Mengen erlauben die effiziente Gruppierung von Objekten sowie die Repräsentation ihrer Eigenschaften und Beziehungen
- mengenorientierte Schreibweisen bilden die Grundlage der Darstellung zahlreicher mathematischer Methoden wie z.B. im Operations Research oder in Methoden der Marktforschung

Wesentliche Lernziele

- Verstehen des Begriffs Menge
- Fähigkeit Mengen darzustellen und Operationen mit ihnen durchzuführen
- Beherrschen der grundlegenden kombinatorischen Methoden, die Elemente einer Menge anzuordnen bzw. eine Teilmenge davon auszuwählen
- Fähigkeit Beziehungen zwischen Mengenelementen darstellen zu können



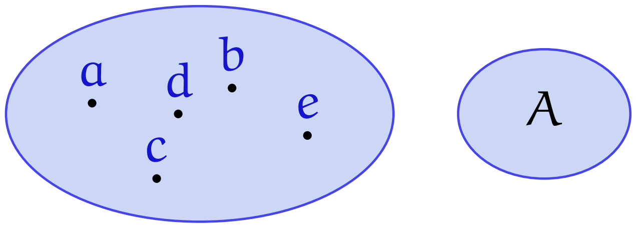
Grundbegriffe



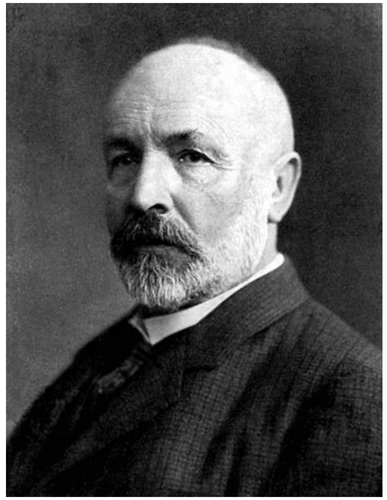
- **Menge** A: Gesamtheit bestimmter unterscheidbarer Objekte (Elemente)
- Es kann immer entschieden werden:

$$a \in A \qquad \text{oder} \qquad a \notin A$$

- Mengendefinition durch **Aufzählen** ($A = \{a, b, c, \ldots\}$)
- oder **Beschreibung der Elemente**; zum Beispiel
  $B = \{b : b \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 0 < b < 10\}$ $= \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$
- Veranschaulichung durch **Venn-Diagramme**:



Venndiagramme der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ (links) und der Menge A (rechts)

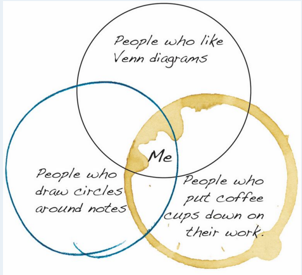


Georg Cantor (1845 – 1918)

John Venn (1834 – 1923)

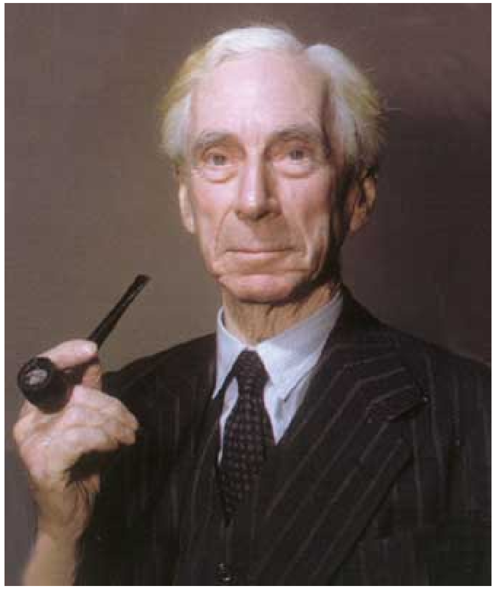
- **Mächtigkeit** einer Menge: Anzahl der Elemente einer Menge; Symbol: $|A|$
- **Leere Menge**: enthält keine Elemente; Symbole: $\emptyset \;=\; \{\}$

z.B.: $A = \{2, 3, 7, 17\}$
$|A| = 4$



Antinomie von Betrand Russell (1872 - 1970)

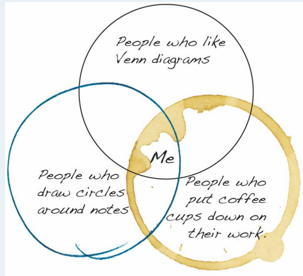
- *„Der Barbier eines Dorfes rasiert genau alle Männer eines Dorfes, die sich nicht selber rasieren“*
- Unklar: Gehört der Barbier zur Menge der Selbstrasierer?



Problem der „naiven“ Mengenlehre

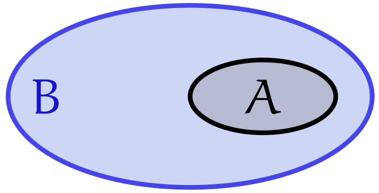
- Widersprüche (s.o.)!
- Lösung: Axiomatische Mengentheorie
- Erster Ansatz mit Axiomen: Georg Cantor
- verbreitet in moderner Mathe: Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC)
- Trotzdem hier im Kurs: Naiver Ansatz

Relationen und Operationen zwischen Mengen

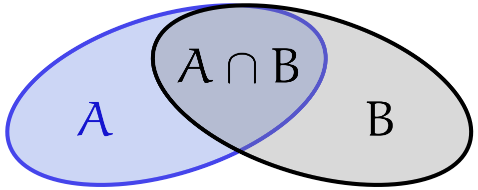


- **Gleichheit**: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$
- **Teilmenge**: $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Rightarrow a \in B)$
- **Echte Teilmenge**:
  $A \subsetneqq B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

  $\subsetneq$ $<$ $\subset$
- **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$: Menge aller Teilmengen von A
- Bemerkung: $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge



Teilmenge $A \subsetneqq B$

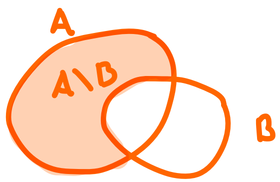


Durchschnittsmenge
$A \cap B$

Mengenoperationen

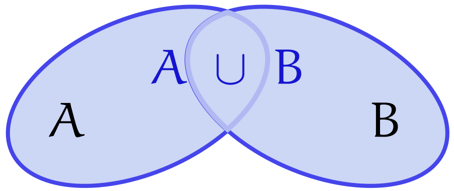
- **Durchschnittsmenge**:
  $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$

  „Schnittmenge von A und B"
- **Vereinigungssmenge**:
  $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$

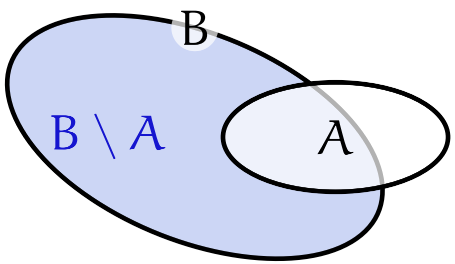


- **Differenzmenge**: $A \backslash B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$

  A ohne B
- **Komplementärmenge** (Vorauss. $A \subseteq B$):
  $\overline{A}_B = \{a : a \in B \wedge a \notin A\}$



Vereinigungsmenge $A \cup B$



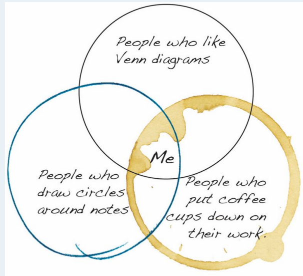
Differenzmenge B ohne A

Beispiel: $A = \{a, 1, \Delta\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{a, 1, \Delta\}, \{1, \Delta\}, \{a, \Delta\}, \{a, 1\}, \{\Delta\}, \{1\}, \{a\}, \{\} \}$$

allgemein: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Beispiel: Skiclub „Buckelpiste“



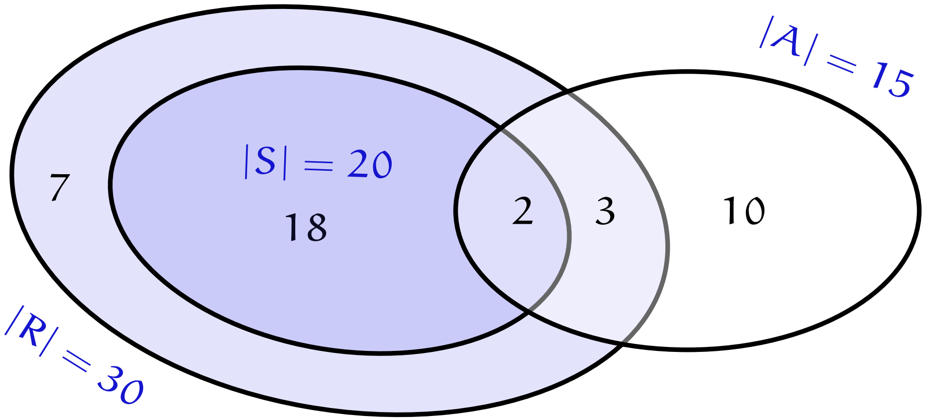
- Vereinsmeisterschaft in den Disziplinen Abfahrt (A), Slalom (S) und Riesenslalom (R)
- 40 Teilnehmer, davon 15 für Abfahrt, 20 für Slalom, 30 für Riesenslalom.
- Alle Slalomteilnehmer: Auch Riesenslalom.
- Zwei Teilnehmer: Alle drei Disziplinen

Damit gilt

$$\begin{aligned}
|A| = 15\,,\ |S| &= 20\,,\\
|R| &= 30\,,\\
|R \cap S| &= 20\,,\\
|R \cup S| &= 30\,,\\
|R \setminus S| &= 10\,,\\
|A \cap S \cap R| = |A \cap S| &= 2\,,\\
|A \cup S \cup R| = |A \cup R| &= 40
\end{aligned}$$

- Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
|A \cap R| &= |A| + |R| - |A \cup R|\\
&= 15 + 30 - 40 = 5\\
|A \cup S| &= |A| + |S| - |A \cap S|\\
&= 15 + 20 - 2 = 33\\
|(A \setminus R) \setminus S| &= |A \setminus R| = |A| - |A \cap R|\\
&= 15 - 5 = 10\\
|(R \setminus S) \setminus A| &= |R| - |R \cap A| - |R \cap S|\\
&\quad + |R \cap S \cap A|\\
&= 30 - 5 - 20 + 2 = 7
\end{aligned}$$



Venndiagramm zum Beispiel

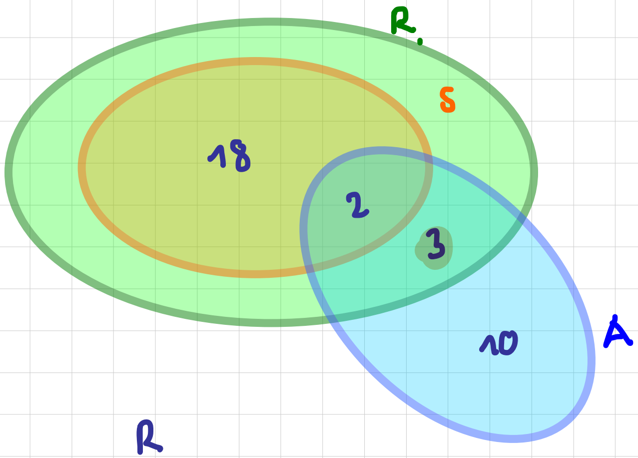
- Vereinsmeisterschaft in den Disziplinen Abfahrt (A), Slalom (S) und Riesenslalom (R)
- 40 Teilnehmer, davon 15 für Abfahrt, 20 für Slalom, 30 für Riesenslalom.
- Alle Slalomteilnehmer: Auch Riesenslalom.
- Zwei Teilnehmer: Alle drei Disziplinen

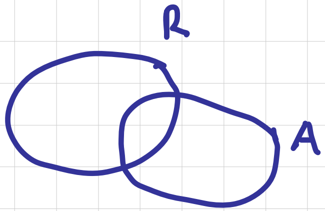
- $|A \cup R \cup S| = 40$

  $|A| = 15,\ |S| = 20,\ |R| = 30$
- $S \subseteq R$
- $|S \cap R \cap A| = 2$

$$|S \setminus A| = |S| - |S \cap A| = 20 - 2 = 18$$

$$|R \setminus S| = |R| - |S| = 30 - 20 = 10$$





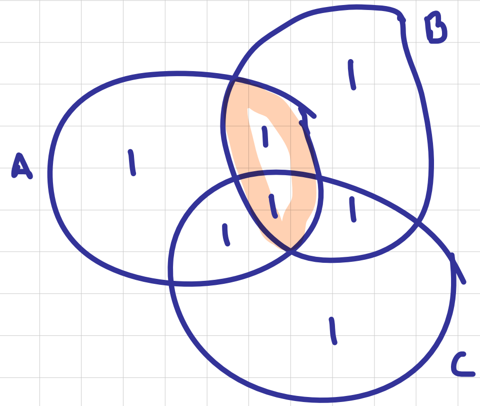
$$|R \cup A| = |R| + |A| - |R \cap A|$$

$$\Leftrightarrow |R \cap A| = |R| + |A| - |R \cup A|$$

$$= 30 + 15 - 40$$

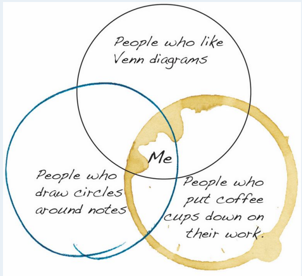
$$= 5$$

$$|(R \cap A) \setminus S| = 5 - 2 = 3$$



$$|A \cup B \cup C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



- Ausgangspunkt: Mengen A, B
- Daraus: Kombination von zwei Elementen (mit Reihenfolge): (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$
- Sprechweise für (a, b): Geordnetes Paar, Tupel
- Menge aller geordneten Paare von A und B (auch: kartesisches Produkt)

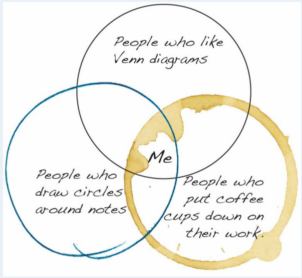

Rene Descartes
(1596 – 1650)

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

- $R \subseteq A \times B$ heißt (binäre) Relation von A in B
- Abbildung von A in B: Eine Vorschrift f, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet

Funktion

$$f : A \to B \quad \text{mit} \quad a \in A \mapsto f(a) = b \in B$$

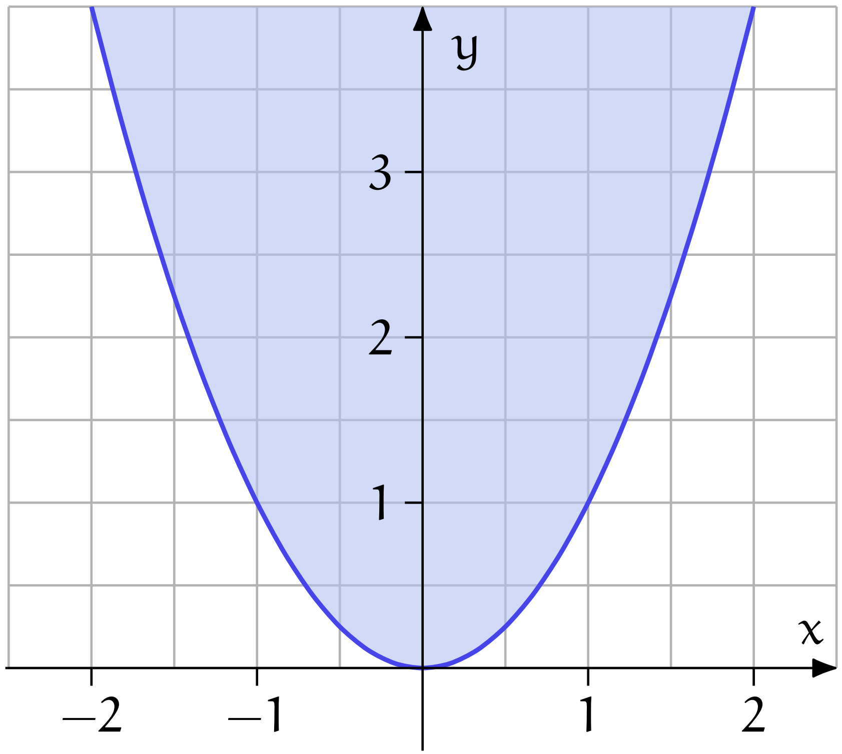


Beispiel: Relation

- Gegeben: Menge $A \times B = \mathbb{R}^2$ und Relation $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

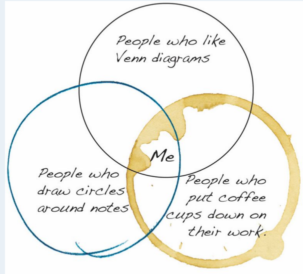
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geqq x^2\}$$

- Damit: R enthält alle Zahlenpaare des $\mathbb{R}^2$, die oberhalb einer Parabel mit dem Scheitel im Nullpunkt liegen
- R ist keine Funktion



Graph der Relation
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geqq x^2\}$

Beispiel: Relationen und Abbildungen



- $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ist Menge von Tätigkeiten,
- die von einer Menge $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von Angestellten zu erledigen sind.

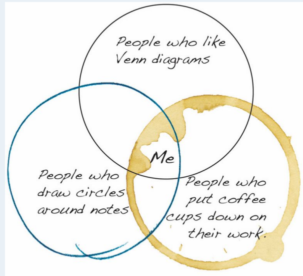
Gegeben: Zuordnungsvorschriften

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$f_1(a_i)$		b_1	b_2		b_3	b_4
$f_2(a_i)$	b_1	b_2	b_2	b_2, b_3	b_3	b_4
$f_3(a_i)$	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1
$f_4(a_i)$	b_1	b_3	b_2	b_2	b_3	b_4

Welches f_i ist eine Funktion?

f_1 : keine Funktion, da keine Zuordnung von a_1
f_2 : k.F., da $f(a_4)$ nicht eindeutig

f_3, f_4 : Funktion



Eine Funktion $f : D \to W$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Beispiel

- Gegeben: $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

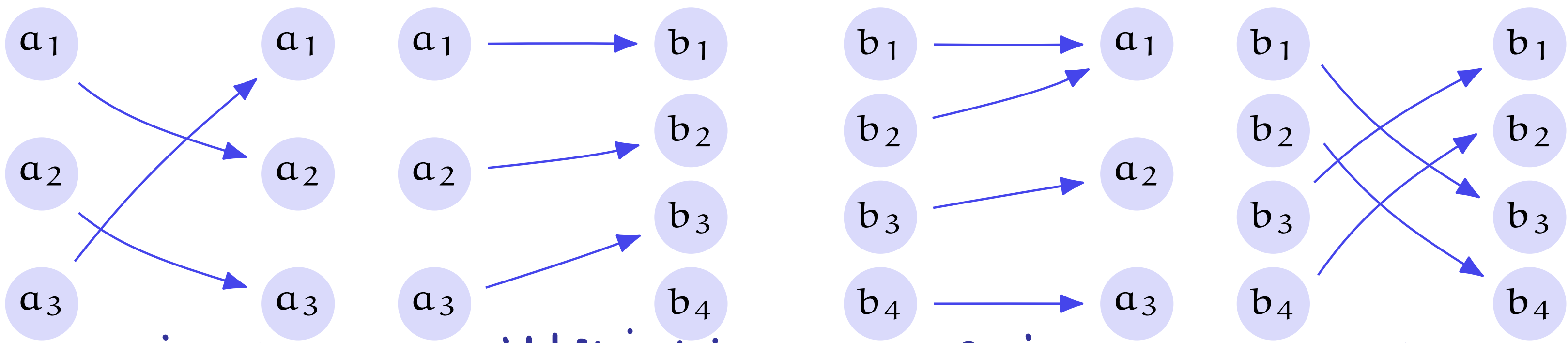
- Funktionen f_1, f_2:

$a \in A$	a_1	a_2	a_3
$f_1(a)$	a_2	a_3	a_1
$f_2(a)$	b_1	b_2	b_3

- Funktionen f_3, f_4:

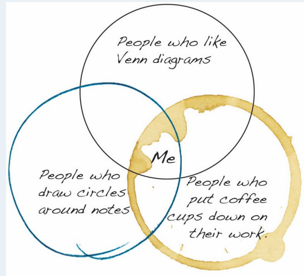
$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_3(b)$	a_1	a_1	a_2	a_3
$f_4(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2

$f_1 : A \to A$ $\quad$ $f_2 : A \to B$ $\quad$ $f_3 : B \to A$ $\quad$ $f_4 : B \to B$



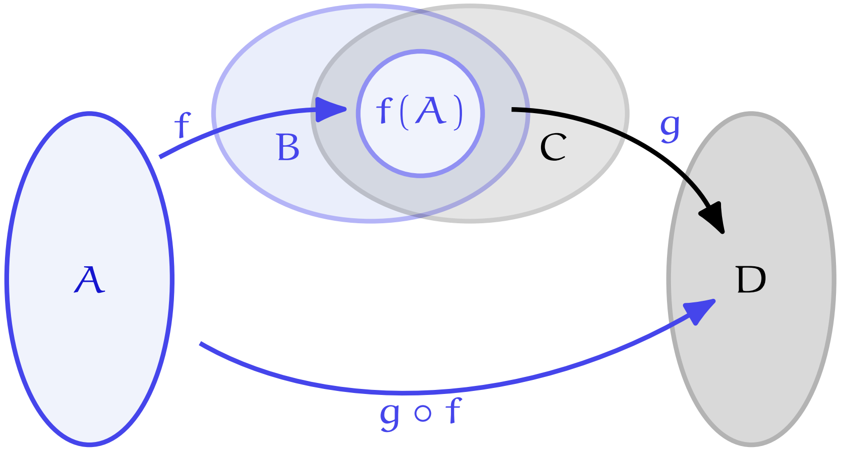
surj., inj $\quad$ nicht surj, inj $\quad$ surj., nicht inj. $\quad$ surj., inj

Die Funktionen f_1, f_4 sind bijektiv, f_2 ist injektiv, f_3 ist surjektiv.



Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ und $f(D_f) \subseteq D_g$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to W_f$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in D_f$

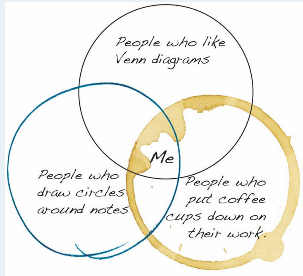


Komposition von f und g

Beispiel (Folie 69): Aus f_1, f_4 bijektiv, f_2 injektiv und f_3 surjektiv folgt

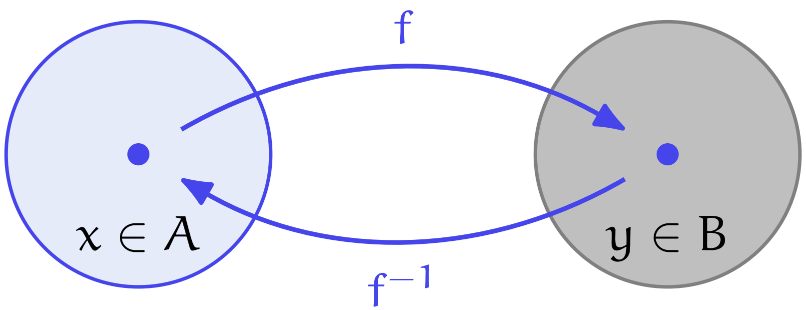
$f_1 \circ f_1 : A \to A$	$f_4 \circ f_4 : B \to B$	bijektiv
$f_2 \circ f_1 : A \to B$	$f_4 \circ f_2 : A \to B$	injektiv
$f_1 \circ f_3 : B \to A$	$f_3 \circ f_4 : B \to A$	surjektiv
$f_2 \circ f_3 : B \to B$	$f_3 \circ f_2 : A \to A$	weder surjektiv, noch injektiv

Wegen $A \neq B$ sind alle weiteren Kompositionen $f_1 \circ f_2$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_2$, $f_2 \circ f_4$, $f_3 \circ f_1$, $f_3 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_4 \circ f_3$ nicht möglich.



Inverse Funktion

- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- Inverse Funktion oder Umkehrabbildung: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird
- Für (bijektive) Kompositionen gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Umkehrabbildung f^{-1} von $f : A \to B$

Beispiel (Folie 69): Wir erhalten die inversen Abbildungen $f_1{}^{-1}, f_2{}^{-1} : B \to B$ mit den Wertetabellen:

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_1{}^{-1}(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2
$f_2{}^{-1}(b)$	b_1	b_4	b_2	b_3

Ferner existieren die Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $(f_2 \circ f_1)$ sowie
$(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ und
$(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ mit

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$(f_1 \circ f_2)(b)$	b_3	b_1	b_2	b_4
$(f_1 \circ f_2)^{-1}(b)$	b_2	b_3	b_1	b_4
$(f_2 \circ f_1)(b)$	b_4	b_2	b_1	b_3
$(f_2 \circ f_1)^{-1}(b)$	b_3	b_2	b_4	b_1