Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Spanisch Zulassungtest:
9.11.2016 um 17.30 Uhr im W2.14
(das ist nur Erinnerung an mail)

falls bestanden:
unbedingt zur Prüfung anmelden

falls mail nicht angekommen:
mail an
studiengang.wirtschaft@hs-augsburg.de

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Grundlagentest Mengen!

Testfrage: Mengen 1

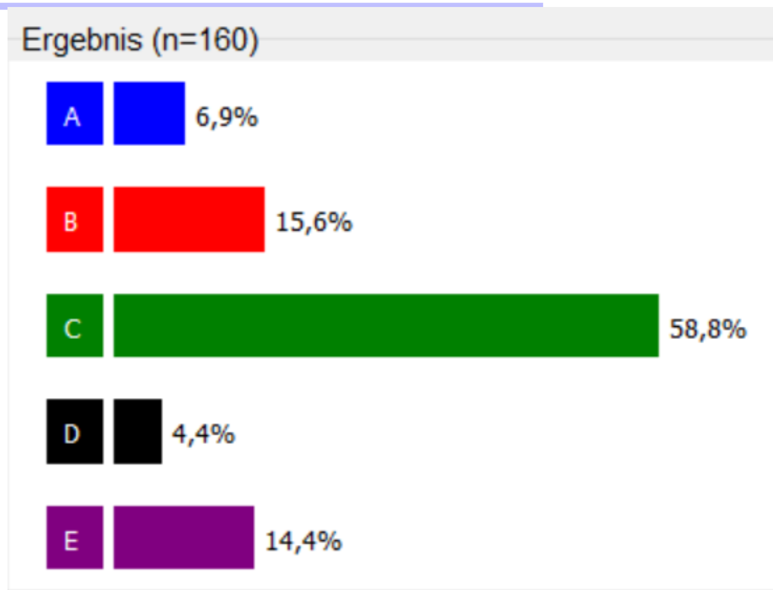
Teilmengen

Gegeben sind die Mengen

$$X = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad Y_1 = \{\}, \quad Y_2 = \{0, -1\}, \quad Y_3 = \{1, 0, -2\}$$

Welche Mengen sind Teilmengen von X?

- ~~A~~ $Y_2 \cup \{-2\}$
- ~~B~~ Y_2 und $\cancel{Y_3}$
- ✓ C $\{2\}$ und Y_1
- ~~D~~ Jedes Y_i mit $i = 1, 2, 3$
- ~~E~~ Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: C

Testfrage: Mengen 2

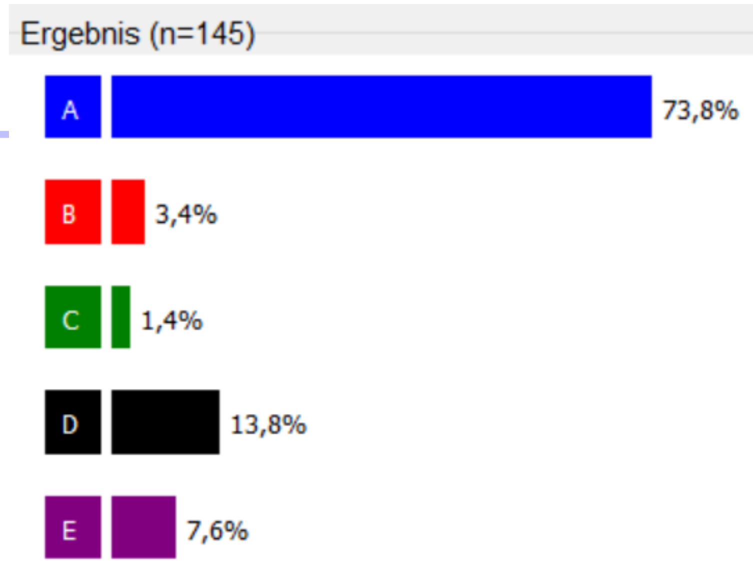
$f: D \to W$

$f: \mathbb{R} \supset D \to W$

Gegeben sind folgende Mengen:

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6\}, \quad C = \{4, 2\} \text{ und } D = \{\}.$$

Welche Aussagen sind jeweils alle wahr?



- A $4 \in A$, $D \subseteq C$, $A \cap B = \{4\}$
- B $\{4\} \cancel{\in} A$, $D \supset C$, $A \cap B = 4$
- C $4 \cancel{\subseteq} A$, $C \in D$, $A \cup B = \{4\}$
- D $\{4\} \subseteq A$, $D \subseteq C$, $A \cup B \cancel{= \{4\}}$
- E Ich kann das nicht oder in jeder Variante stimmt was nicht.

Richtig: A

Testfrage: Mengen 3

Wie viele Teilmengen der Buchstabenmenge $M = \{x, p, q, y\}$ mit höchstens zwei Elementen gibt es?

≙ höchstens 2 El.

$\{\ \}$ $\{x\}$ $\{p\}$ $\{q\}$

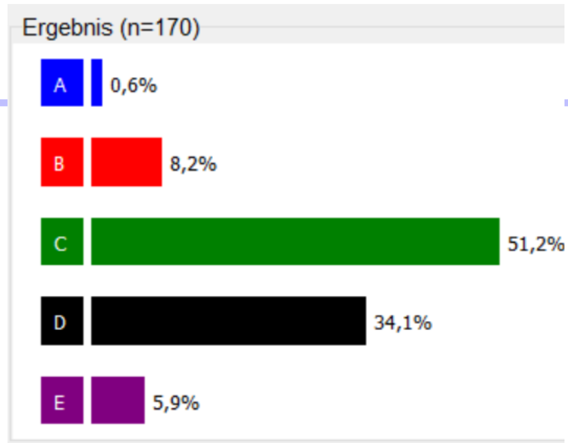
$\{y\}$ $\{x,p\}$ $\{x,q\}$ $\{x,y\}$

$\{p,q\}$ $\{p,y\}$ $\{q,y\}$ $\{x,p,q\}$

$\{x,p,y\}$ $\{x,q,y\}$ $\{p,q,y\}$ $\{x,p,q,y\}$

- A 4
- B 8
- C 11
- D 16
- E was anderes

Richtig: C



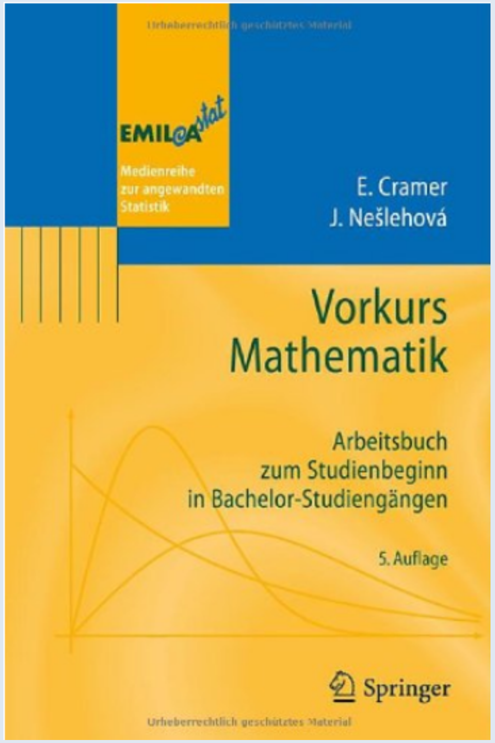
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Mengenmäßig ist alles in Ordnung!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.13-2.19 aus dem Buch!
- 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.7-2.19 aus dem Buch!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.1-2.19 aus dem Buch!

Übungsmaterial

S. 64ff., Aufgaben 2.1 - 2.19 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Gliederung

4 Folgen und Reihen

- Eigenschaften und Beispiele
- Konvergenz und Grenzwert
- Reihen

Warum beschäftigen wir uns mit Folgen und Reihen?

- Analyse von Datensequenzen, insbesondere Modellierung diskreter, zeitlicher Entwicklungen (z.B. von Aktienkursen, Absatzmengen)
- Grundlage der Finanzmathematik (z.B. Zinseszinsrechnung, Tilgungsrechnung)
- wesentlich zum Verständnis der Konzepte der Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wesentliche Lernziele:

- Verständnis der Begriffe Folgen und Reihen
- Fähigkeit Folgen und Reihen nach ihrer Art zu klassifizieren
- Kennenlernen typischer, insbesondere der Grenzwerteigenschaften von Folgen und Reihen
- Fähigkeit, diese Eigenschaften zu erkennen und nachzuweisen

Definition und Eigenschaften

Definition

Leonardo von Pisa
(ca. 1180 - 1250)

- Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
- Schreibweise für Folgenglieder: $a(0), a(1), \ldots$ oder $a_0, a_1, \ldots$
- Schreibweise für Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder (a_n)

Eigenschaften von Folgen: Eine Folge heißt

- endlich (unendlich), falls Anzahl der Folgenglieder endlich (unendlich) ist
- gesetzmäßig gebildet, falls Folgenglieder einem Bildungsgesetz folgen, zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{n+1}$
- rekursiv definiert, falls zur Berechnung eines Folgengliedes frühere Werte nötig sind
  Beispiel: $a_0 = 0;\ a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 1$
  (Fibonacci-Folge)

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0	1	1	2	3	5

$a_2 = a_1 + a_0$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

Spezielle Folgen

- Arithmetische Folge: $(a_n) : \ a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $d \in \mathbb{R}$
- Geometrische Folge: $(a_n) : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $q \in \mathbb{R}$

Beispiel: $a: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$

$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}n \longrightarrow$ rekursiv: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{4}$

↳ explizite Darstellung

n	0	1	2	3	…
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	…

arithmetische Folge (explizit):

$$\boxed{a_n = s + d \cdot n} \qquad d, s \in \mathbb{R}$$

(ganz anderes) **Beispiel:** $a_n = 1000 \cdot 1{,}1^n$

n	an
0	1000.000
1	1100.000
2	1210.000
3	1331.000
4	1464.100
5	1610.510
6	1771.561
7	1948.717
8	2143.589
9	2357.948
10	2593.742

$\cdot 1.1$ $\cdot 1.1$ $\cdot 1.1$

rekursiv: $a_0 = 1000$

$a_n = a_{n-1} \cdot 1.1$

allgemein: $s, q \in \mathbb{R}$

$$\boxed{a_n = s \cdot q^n}$$ geometrische Folge

Konvergenz bzw. Grenzwert einer Folge

Definition: a heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge (a_n), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Für jedes (noch so kleine) positive ε gibt es eine Grenze n_0 ab der alle Folgenelemente a_n $(n > n_0)$ höchstens um ε von a abweichen

Beispiel: $a_n = \frac{n}{n+1}$; Vermutung: Grenzwert a ist 1

n	an
0	0.0000000
1	0.5000000
2	0.6666667
3	0.7500000
4	0.8000000
5	0.8333333
6	0.8571429
7	0.8750000
8	0.8888889
9	0.9000000
10	0.9090909
⋮	

$|a_n - a| < \varepsilon$

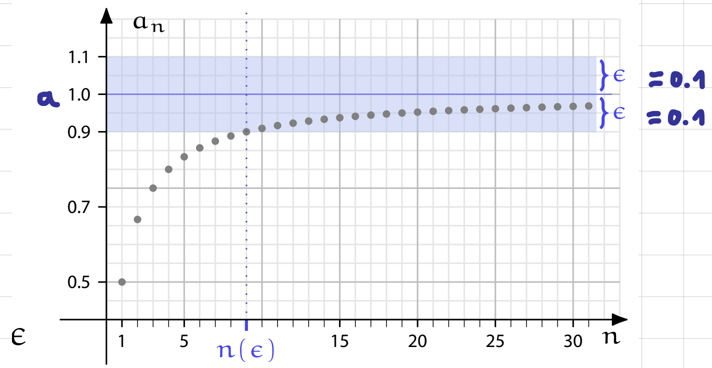
$\Leftrightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

z.B. $\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow n > \frac{1}{\frac{1}{100}} - 1 = 99$



Geometrische Folge: Beispiel Schachspiel

- Sissa ibn Dahir, der Erfinder des Schachspieles, darf sich vom indischen König Shihram eine Belohnung wünschen.
- Sein Wunsch: So viele Weizenkörner, wie man auf ein Schachbrett legen kann, wenn

$$
\begin{array}{lcll}
1.\,\text{Feld} & : & a_0 = 1 & \text{Korn} \\
2.\,\text{Feld} & : & a_1 = 2 & \text{Körner} \\
3.\,\text{Feld} & : & a_2 = 4 & \text{Körner} \\
4.\,\text{Feld} & : & a_3 = 8 & \text{Körner} \\
 & & \vdots & \\
n.\,\text{Feld} & : & a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} & \text{Körner}
\end{array}
$$

Konvergenz und Grenzwert

- Fragen: Bleiben Folgenglieder ab einem gewissen n in einen kleinen Bereich um einen festen Wert?
- Und: Kann man diesen Bereich beliebig verkleinern?
- Definition:

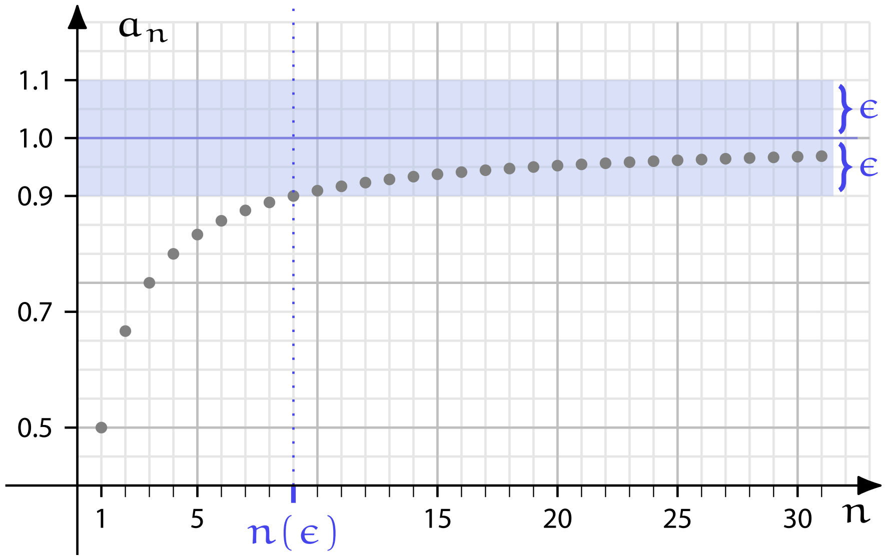
> $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n) $\Leftrightarrow$
>
> $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n(\epsilon) \quad$ mit $\quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > n(\epsilon)$

- Schreibweise für Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- Existiert dieser Grenzwert, heißt die Folge **konvergent**
- Ist der Grenzwert $a = 0$, heißt die Folge **Nullfolge**
- Existiert kein Grenzwert, heißt die Folge **divergent**

Beispiel zur Definition des Grenzwerts

- Gegeben: $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Vermutung:
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 1$
- Beweis: Wenn $a = 1$, dann folgt

$$
\begin{aligned}
& |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{\epsilon} < n+1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{\epsilon} - 1 < n
\end{aligned}
$$



Folge (a_n) mit $n(\epsilon) = 9$ für $\epsilon = 0.1$.

- Also: Für jedes ϵ findet man ein $n(\epsilon)$, so dass die Grenzwertbedingung stimmt
- Zum Beispiel: Wähle
  $\epsilon = 0.1 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{0.1} - 1 = 10 - 1 = 9$

Rechenregeln für Grenzwerte

Gegeben:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a \quad$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$
- kurz: $(a_n) \to a \quad$ und $\quad (b_n) \to b$

  „geht gegen"

Dann gilt:

- $(a_n + b_n) \to a + b$
- $(a_n - b_n) \to a - b$
- $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
- $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $(a_n^c) \to a^c$
  $(a_n > 0,\ a > 0,\ c \in \mathbb{R})$
- $(c^{a_n}) \to c^a \quad (c > 0)$

Beispiel (Grenzwertsätze)

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\,(n^2 + 2n^3)}{n\,(n - 5\sqrt{n^5})}$$

$$= \frac{n^{1/2}\,(n^2 + 2n^3)}{n\,(n - 5\,n^{5/2})}$$

$$= \frac{n^{2.5} + 2n^{3.5}}{n^2 - 5n^{3.5}} =$$

teile Zähler und Nenner durch höchste Potenz von n (hier: $n^{3.5}$)

$$\frac{2\cancel{n^{3.5}}}{\cancel{n^{3.5}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} + 2}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1.5} - 5} \longrightarrow \frac{0 + 2}{0^{1.5} - 5} = -\frac{2}{5} = -0.4$$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\left[\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}\ \right]$$

Definition der Reihe

- Gegeben: (a_n) unendliche Folge in $\mathbb{R}$
- Dann heißt (s_n) mit

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

eine unendliche Reihe.

- s_n heißt n-te Partialsumme
- Klar ist: Reihen sind spezielle Folgen

Beispiel:

- (a_n) geometrische Folge $\to$ (s_n) geometrische Reihe
- $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$; mit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- Offensichtlich gilt: $a_n = a_{n-1}\, q = a_{n-2}\, q^2 = \ldots = a_0\, q^n$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Reihen $\hat{=}$ Summen von Folgenelementen

Beispiel: $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot i \quad \to a_i$

n	0	1	2	3	4	....	100
a_n	$\frac12$	$\frac14$	0	$-\frac14$	$-\frac24$	....	$-\frac{98}{4}$
S_n	$\frac12$	$\frac34$	$\frac34$	$\frac12$	0	....	-1212

$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac12 + \frac14 + 0 + (-\frac14)$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{1}\left(\frac12 - \frac14\cdot i\right) = \underbrace{\left(\frac12 - \frac14\cdot 0\right)}_{a_0} + \underbrace{\left(\frac12 - \frac14\cdot 1\right)}_{a_1}$$

$$= \frac12 + \frac14 = \frac34$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{2}\left(\frac12 - \frac14 i\right) = a_0 + a_1 + a_2 = \frac12 + \frac14 + 0 = \frac34$$

$$\sum_{i=0}^{100}\left(\frac12 - \frac14\cdot i\right) = \left(\frac12 - \frac14\cdot 0\right) + \left(\frac12 - \frac14\cdot 1\right) + \dots + \left(\frac12 - \frac14\cdot 100\right)$$

$$= 101\cdot\frac12 - \frac14\cdot\underbrace{(0+1+2+\dots+100)}_{101\cdot 100/2}$$

$$= 101\cdot\left[\frac12 - \frac14\cdot\frac{100}{2}\right] = -1212$$

allgemein: $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac12 - \frac14\cdot i = (n+1)\cdot\left[\frac12 - \frac14\cdot\frac{n}{2}\right]$

ganz allgemein: $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} s + d\cdot i = (n+1)\cdot\left[s + d\cdot\frac{n}{2}\right]}$

arithmetische Reihe

(anderes) Beispiel: $S_n = \sum_{i=0}^{n} 1000\cdot 1.1^i$

n	an	sn
0	1000.000	1000.000
1	1100.000	2100.000
2	1210.000	3310.000
3	1331.000	4641.000
4	1464.100	6105.100

[$(x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^n)\cdot(x-1)$

$$= \cancel{x^1} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \dots + \cancel{x^n} + x^{n+1}$$
$$- x^0 - \cancel{x^1} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \dots - \cancel{x^n}$$

$$= x^{n+1} - x^0 = x^{n+1} - 1$$

$$\iff x^0 + x^1 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$]

zurück zum Beispiel:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 1000\cdot 1.1^i = 1000\cdot(1.1^0 + 1.1^1 + \dots + 1.1^n)$$

$$= 1000\cdot\frac{1.1^{n+1}-1}{1.1-1}$$

ganz allgemein: $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} s\cdot q^i = s\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$

geometrische Reihe

Beobachtung: gegeben: $S_n = \sum_{i=0}^{n} 1\,\text{Mio}\cdot 0.99^i$

$$= 1\,\text{Mio}\cdot\frac{0.99^{n+1}-1}{0.99-1}$$

$$= 100\,\text{Mio}\cdot(1 - 0.99^{n+1})$$

[Vermutung: $0.99^{n+1} \to 0$

Beweis: $|0.99^{n+1} - 0| < \varepsilon \iff 0.99^{n+1} < \varepsilon$

$\iff (n+1)\cdot\ln 0.99 < \ln\varepsilon$

$\iff n+1 > \frac{\ln\varepsilon}{\ln 0.99}$ ✓]

allgemein $S_n = \sum_{i=0}^{n} s\cdot q^i$ konvergiert, wenn $0 < q < 1$

mit $S_n \to \frac{s}{1-q}$

Konvergenzkriterium für Reihen

gegeben: Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

- $a_i \to 0$ (ai ist Nullfolge)
  - ja → S_n ist geom. Reihe ($|q|<1$)
    - ja → S_n konvergiert
    - nein → Quotienten-Kriterium $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to ?$
      - $? < 1$ → S_n konvergiert
      - $? = 1$ → keine Aussage möglich ...
      - $? > 1$ → S_n divergiert
  - nein → S_n divergiert (hat keinen Grenzwert)

Beispiel: $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{10i+3}{2^i}$

$\hookrightarrow a_i \to 0$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{10(n+1)+3}{2^{n+1}}}{\frac{10n+3}{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10(n+1)+3}{10n+3} = 0.5 \cdot \frac{10n+13}{10n+3}$$

erweitere Bruch mit $\cdot \frac{1}{n}$

$$= 0.5 \cdot \frac{10 + 13 \cdot \frac{1}{n}}{10 + 3 \cdot \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.5 \cdot \frac{10+13\cdot 0}{10+3\cdot 0} = 0.5 < 1$$

$\Rightarrow$ s_n konvergiert

Geometrische Reihe: Beispiel Schachspiel

- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1-q^{64}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

- Das bedeutet:

100 Körner $\triangleq$ 1 g Weizen $\longrightarrow$ $1{,}8 \cdot 10^{17}\,\text{g}$
$\longrightarrow$ $1{,}8 \cdot 10^{14}\,\text{kg}$
$\longrightarrow$ $1{,}8 \cdot 10^{11}\,\text{t} = 180$ Mrd. t

1 Güterwagon $\triangleq$ 50 t Weizen $\longrightarrow$ 3,6 Mrd. Güterwagons
$\longrightarrow$ 36 Mrd. m langer Eisenbahnzug
$\longrightarrow$ 36 Mill. km

$\longrightarrow$ 100-fache Entfernung zwischen Erde und Mond

Konvergenzkriterien für Reihen

Gegeben: a_i Folge, $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Divergenzkriterium

- Ist s_n konvergent $\Rightarrow$ a_i ist Nullfolge
- Also äquivalent dazu:

$$a_i \text{ ist keine Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

- Bemerkung: Für $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich
- Spezialfall geometrische Reihe:

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent} \\ q \geqslant 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent} \end{cases}$$