

Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn der Prüfungszeit	

Hausaufgaben

5.10.
2016

R kennen lernen	3
Aufgabe 1: Installation und erste Schritte . . .	4
Aufgabe 2: Variablen und Zuweisungen . . .	6
Aufgabe 3: Vektoren in R	8
Aufgabe 4: R als Logbuch	9
Aufgabe 5: Funktionen einer reellen Variablen	11
Aufgabe 6: Funktionsplots	13

12.10.
2016

Grundlagen	14
Aufgabe 7: Zusammenfassung	14
Aufgabe 8: Binomische Formeln	15
Aufgabe 9: Wurzeln und Potenzen	16
Aufgabe 10: Logarithmen	17
Aufgabe 11: Summen ausrechnen	18
Aufgabe 12: Notation von Summen	19
Aufgabe 13: Summen: Indexverschiebung . .	20
Aufgabe 14: Summe mit Trick	21
Aufgabe 15: Mitternachtsformel	22

19.10.
2016

Aussagen	23
Aufgabe 16: Implikation verbal	23
Aufgabe 17: Formulieren von Aussagen . . .	24
Aufgabe 18: Wahrheitstabelle	25
Aufgabe 19: Eine Tautologie	26
Aufgabe 20: All- und Existenzaussagen . . .	27
Aufgabe 21: Direkter Beweis	28
Aufgabe 22: Verknüpfung: Wahr oder falsch?	30
Aufgabe 23: Beweise	31
Aufgabe 24: Vollständige Induktion	32
Aufgabe 25: Vollständige Induktion: Strecken	33
Aufgabe 26: Vollständige Induktion: Fibonacci	34

26.10.16

Mengen und Relationen	35
Aufgabe 27: Teilmengen?	35
Aufgabe 28: Schnitt, Vereinigung, Differenz .	36
Aufgabe 29: Einschluss und Ausschluss . . .	37
Aufgabe 30: Potenzmengen	38
Aufgabe 31: Relationen	39
Aufgabe 32: Relationen und Abbildungen . .	40
Aufgabe 33: Komposition	41
Aufgabe 34: Injektivität und Surjektivität . .	42

2.11.16

Folgen	43
Aufgabe 35: Rekursiv definierte Folge	43
Aufgabe 36: Grenzwertsätze	44
Aufgabe 37: Reihenkonvergenz	45
Aufgabe 38: Arithmetisch und Geometrisch .	46
Aufgabe 39: Verknüpfte Folgen	47
Aufgabe 40: Konvergenz durch Abschätzen .	48
Aufgabe 41: Quotientenkriterium	49

Reelle Funktionen	52
Aufgabe 42: Kurvendiskussion ohne Ableitung	52
Aufgabe 43: Definitionsbereich, Extremwerte	53
Aufgabe 44: Parameter bestimmen	54
Aufgabe 45: Stetigkeit	55
Aufgabe 46: Parameter und Stetigkeit	56

Differentialrechnung	57
Aufgabe 47: Elementare Ableitungsregeln . .	57
Aufgabe 48: Quotientenregel	58
Aufgabe 49: Kettenregel	59
Aufgabe 50: noch mehr Ableitungen	60
Aufgabe 51: Preiselastizität 1	61
Aufgabe 52: Preiselastizität 2	62
Aufgabe 53: Differenzierbarkeit	63
Aufgabe 54: Verpackung optimieren	64
Aufgabe 55: Minimale Kosten	65
Aufgabe 56: Gompertzfunktion	66
Aufgabe 57: Optimales Produktionsniveau . .	67
Aufgabe 58: Monotonie und Konvexität . . .	68
Aufgabe 59: Kurvendiskussion	69
Aufgabe 60: Graph deuten	70
Aufgabe 61: Grenzumsatz, Grenzkosten . . .	71

Integralrechnung	72
Aufgabe 62: Fläche zwischen Kurven	72
Aufgabe 63: Nochmal Flächen	73
Aufgabe 64: Grenzkosten	74
Aufgabe 65: Produktlebenszyklus	75
Aufgabe 66: Umsatz, Kosten und Gewinn . .	76
Aufgabe 67: Absatzverlauf	77
Aufgabe 68: Gamma ganz groß	78
Aufgabe 69: Exponentialverteilung	79
Aufgabe 70: Ableiten und Integrieren	80

Finanzmathematik	81
Aufgabe 71: Einfach	81
Aufgabe 72: Girokonto: Quartalsabrechnung .	82
Aufgabe 73: Gemischt	83
Aufgabe 74: Unterjährig	84
Aufgabe 75: Durchschnittlicher Zins	85
Aufgabe 76: Durchschnittliche Inflation . . .	86
Aufgabe 77: Kaufkraft und Realwert	87
Aufgabe 78: Doppelt so viel	88
Aufgabe 79: Wie lange?	89
Aufgabe 80: Waldwert	90
Aufgabe 81: effektiv und nominal	91
Aufgabe 82: Maschine	92
Aufgabe 83: Rente auf einmal	93
Aufgabe 84: Bausparer	94
Aufgabe 85: Einholen mit Vorsprung	95
Aufgabe 86: Sparen für die Rente	96
Aufgabe 87: Achtung: unterjährige Zinsen . .	97

Aufgabe 88: Betriebsrente: Rückstellungen . .	98
Aufgabe 89: Ratentilgung	99
Aufgabe 90: Ratentilgung punktuell	100
Aufgabe 91: Ratentilgung: Effektivzins	101
Aufgabe 92: Annuitätentilgung	102
Aufgabe 93: Wertpapier	103
Aufgabe 94: Wertpapier: Duration	104
Aufgabe 95: Wertpapier: Kupon bestimmen . .	105
Aufgabe 96: Finanzierung Studium	106
Aufgabe 97: Wieviel kostet Manhattan? . . .	107
Aufgabe 98: Sparplan von Susi	108
Aufgabe 99: Sven Sonnehr	109

Lineare Algebra	110
Aufgabe 100: Rechnen mit Matrizen	110
Aufgabe 101: Produktion: Zwischenprodukt .	111
Aufgabe 102: Punktfolgen	112
Aufgabe 103: Homogenes Wachstum	113
Aufgabe 104: Determinanten	114
Aufgabe 105: Eigenwerte	115
Aufgabe 106: Eigenwerte rückwärts	116

Lineare Gleichungssysteme	117
Aufgabe 107: Gozintograph	117
Aufgabe 108: Allgemeines zu LGS	118
Aufgabe 109: Neue Kostenstellen	119
Aufgabe 110: Zwei LGS	120
Aufgabe 111: Marktentwicklung	121
Aufgabe 112: Tee	122
Aufgabe 113: Bier	123
Aufgabe 114: Invertieren	124

Lineare Programme	125
Aufgabe 115: Maximaler Gewinn	125
Aufgabe 116: 4 Nebenbedingungen	126
Aufgabe 117: Simplex	127
Aufgabe 118: Telefone	128
Aufgabe 119: Maximaler Umsatz	129
Aufgabe 120: Keine Lösung	130
Aufgabe 121: Variabler Gewinn	131
Aufgabe 122: Schweinefutter	132

r

Grundlagentest Gleichungen!

Testfrage: Gleichungen 1

Quadratische Gleichung

Falls $a, x \neq 0$ sind für die Gleichung

$$x - a = \frac{2a^2}{x}$$

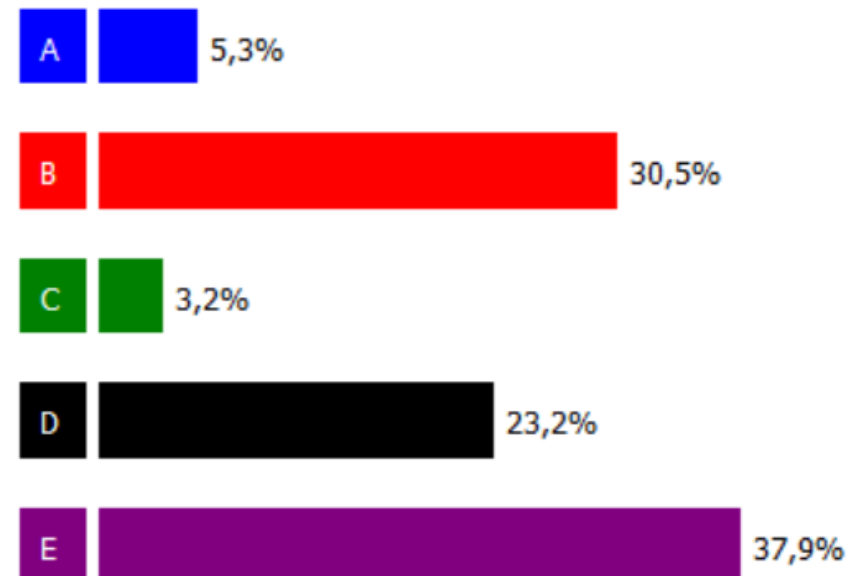
$$\begin{aligned}x^2 - ax - 2a^2 &= 0 \\x_{1/2} &= \frac{1}{2} (a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}) \\&= \frac{a}{2} (1 \pm 3) = \begin{cases} 2a \\ -a \end{cases}\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von a folgende $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung:

- A a
- B $2a$ und $-a$
- C $3,5a$ und $-2,5a$
- D es gibt keine Lösung
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: B

Ergebnis (n=95)



Testfrage: Gleichungen 2

Die Gleichung

$$\frac{x-6}{1-x} + \frac{5}{(1-x)(x-6)} = \frac{x-7}{x-6}$$

$$x \neq 1, 6$$

$$\text{UV: } (1-x)(x-6)$$

hat folgende Lösungsmenge L:

A $L = \{6, 4\}$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + 5 = (x-7)(1-x)$$

B $L = \{6, 1\}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + 5 = -x^2 + 8x - 7$$

C $L = \{1\}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 48 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

D $L = \{4\}$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} (10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 24}) = 5 \pm 1 = \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \right.$$

aber: x kann nicht 6 sein, also

$$L = \{4\}$$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: D

	Antwort A	Antwort B	Antwort C	Antwort D	Antwort E	Gesamt	^
09.11.2016 14:45:42	18 (23%)	11 (14%)	6 (8%)	7 (9%)	37 (47%)	79	

Testfrage: Gleichungen 3

Betragsgleichung

Die Gleichung

$$|x - 3| - |2x + 4| = 0$$

hat folgende Lösungsmenge L:

(A) $L = \{3, -2\}$

(B) $L = \{-7\}$

(C) $L = \{-7, -\frac{1}{3}\}$

(D) $L = \{3\}$

(E) Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

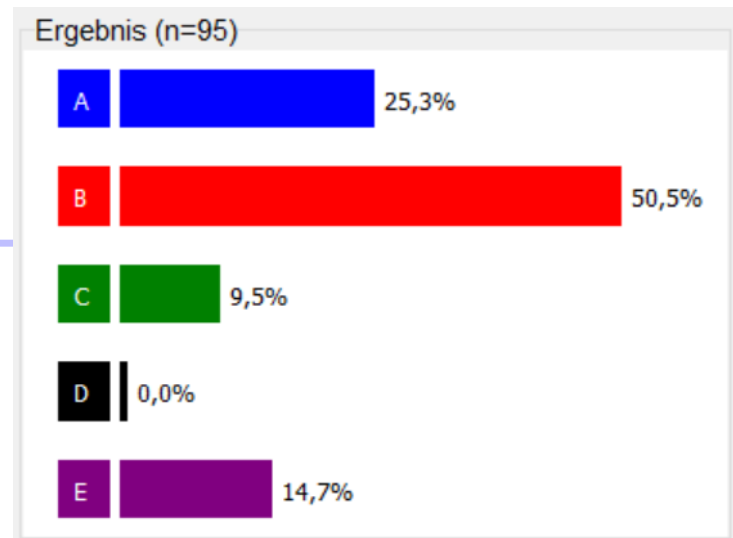
$$|x-3| = |2x+4|$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2x+4 \quad \vee \quad x-3 = -(2x+4)$$

$$\Leftrightarrow -7 = x \quad \vee \quad 3x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -7 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$$

Richtig: (C)

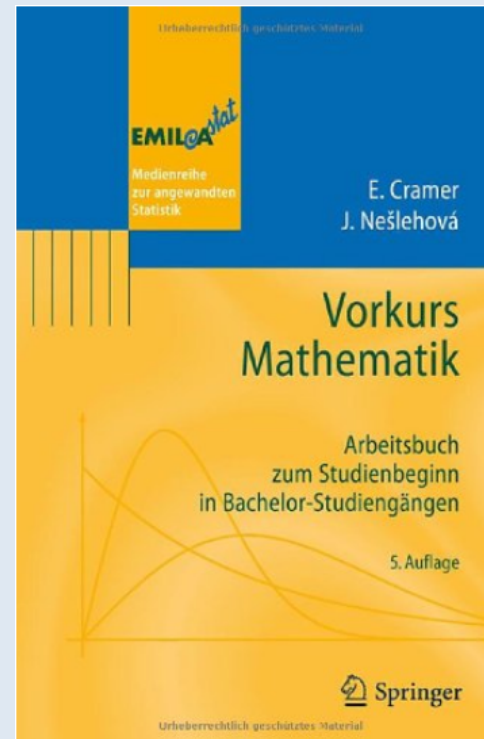


Ihr Ergebnis:

- ▶ 3 Antworten richtig: Sie wirken ausgeglichen!
- ▶ 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.12 - 6.19!
- ▶ Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.8 - 6.19!
- ▶ Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.1 - 6.19!

Übungsmaterial

Aufgaben 6.1 - 6.19 aus



<http://goo.gl/qHwN7X>

- 1 Grundlegende Bausteine
- 2 Aussagenlogik
- 3 Mengen
- 4 Folgen und Reihen
- 5 Reelle Funktionen
- 6 Differentialrechnung
- 7 Integration
- 8 Finanzmathematik
- 9 Lineare Algebra
- 10 Lineare Programme



- 5 Reelle Funktionen
 - Grundbegriffe
 - Elementare Funktionen
 - Stetigkeit reeller Funktionen



Warum beschäftigen wir uns mit reellen Funktionen?

- ▶ allgemein: kompakte und präzise Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Faktoren
- ▶ speziell: Modellierung technischer und ökonomischer Systeme
- ▶ Basis für Analyse und Optimierung von Systemen / Prozessen

Wesentliche Lernziele

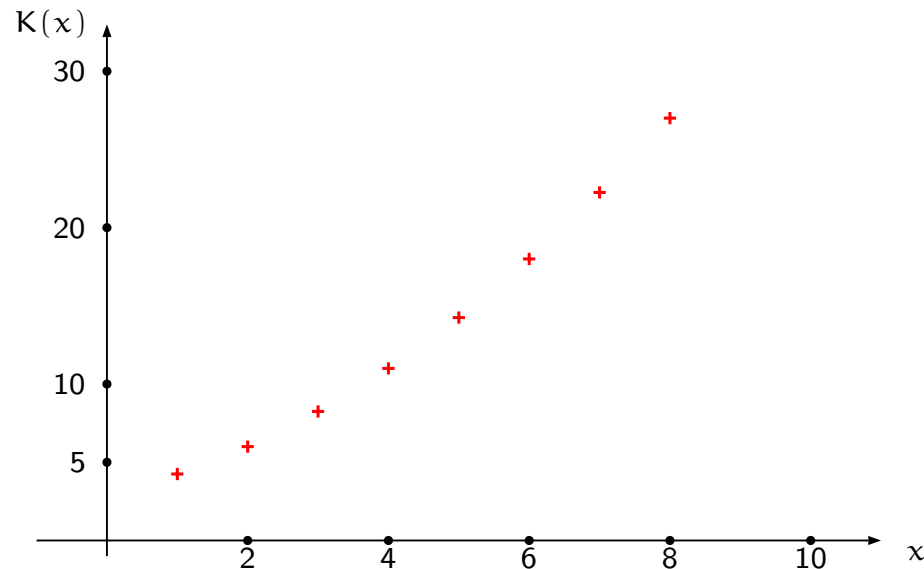
- ▶ Fähigkeit mit den **wesentlichen Begriffen** im Zusammenhang mit Funktionen umzugehen
- ▶ Kennenlernen der **wichtigsten Klassen** reeller Funktionen
- ▶ Beherrschen des **Stetigkeitsbegriffs**

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
- 5. Reelle Funktionen**
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



Kostenfunktion

- ▶ Jetzt: Betrachte zusätzlich Funktion $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$
- ▶ für Definitionsbereich $D = \{1, \dots, 8\}$



- ▶ Darstellung durch Funktion: kompakt, eindeutig
- ▶ Möglicher Ausgangspunkt für Prognosen (Kosten für 9, 10, ... Einheiten)

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

Definition

- ▶ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **reellwertige Abbildung** mit Definitionsbereich D
- ▶ Mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt f **reelle Funktion** von n Variablen

Darstellung von Funktionen

- ▶ Durch **Funktionsgleichungen** $f(x_1, \dots, x_n) = y$
 - $x = (x_1, \dots, x_n)$: **unabhängige (exogene) Variablen**
 - y : **abhängige (endogene) Variablen**
- ▶ Durch Wertetabellen
- ▶ Durch Graphen
 - Für $D \subseteq \mathbb{R}$: Darstellung im kartesischen Koordinatensystem
 - Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$: 3-dimensionale Darstellung oder **Niveaulinien**
 $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



Cobb-Douglas-Funktion

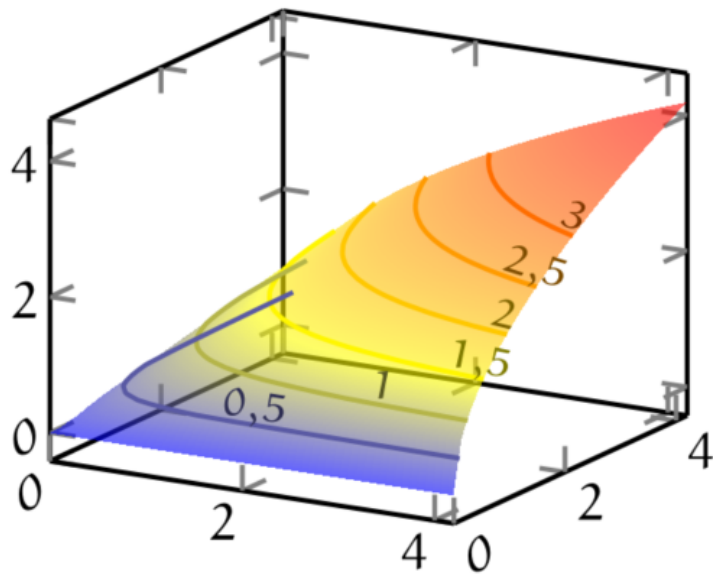
- ▶ neoklassische Produktionsfunktion der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$$

- ▶ Beispiel für zwei Produktionsfaktoren

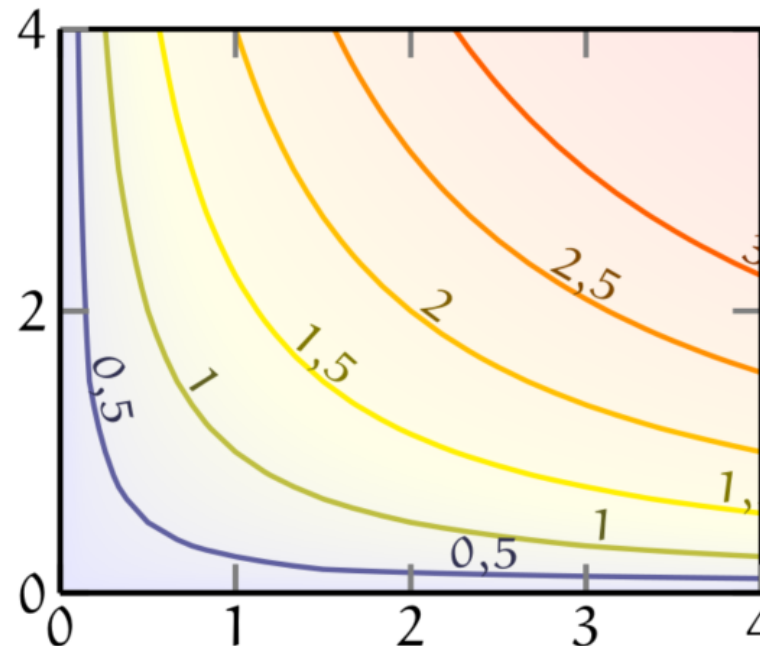
$$f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Dreidimensionale Darstellung



Niveaulinien

für $f(x_1, x_2) = c$ mit $c = 1/2, \dots, 3$



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt:

- ▶ **surjektiv**, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- ▶ **injektiv**, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- ▶ **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- ▶ Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}$
- ▶ **Zusammengesetzte Funktion**: $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in D_f$

Inverse Funktion / Umkehrfunktion

- ▶ Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \rightarrow W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- ▶ **Inverse Funktion**: $f^{-1} : W \rightarrow D$, $y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f_1(x) = 2x - 3 = y$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f_2(x) = x^3 = y$$

Damit ebenfalls bijektiv: Inverse Abbildungen $f_1^{-1}, f_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y \mapsto f_1^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 3) = x$$

$$y \mapsto f_2^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = x$$

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ (\Leftrightarrow) \quad x &= \sqrt[3]{y} \end{aligned}$$

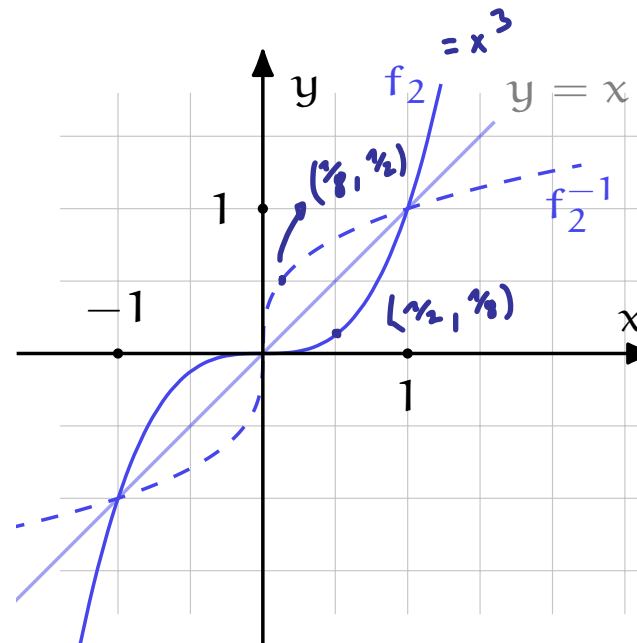
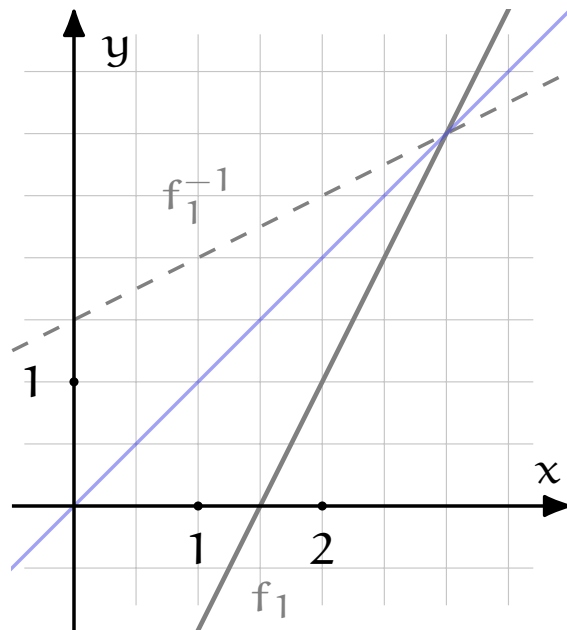


Abbildung: Graphen der Abbildungen $f_1, f_2, f_1^{-1}, f_2^{-1}$



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
- 5.1. Grundbegriffe
- 5.2. Elementare Funktionen
- 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



- ▶ Gegeben: $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit identischem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.
- ▶ Dann sind auch die folgenden Abbildungen reelle Funktionen:

$$f + g : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \in D \quad \mapsto \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f - g : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \in D \quad \mapsto \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \in D \quad \mapsto \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : D_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \in D_1 \quad \mapsto \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
- 5.1. Grundbegriffe
- 5.2. Elementare Funktionen
- 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

- ▶ Gegeben: Reelle Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Definitionen

- ▶ **c-Stelle** von f : $x_c \in D$ mit $f(x_c) = c$
 - ▶ Mit $c = 0$ heißt c-Stelle dann **0-Stelle** von f
 - ▶ **Maximalstelle** oder **globales Maximum**:
 $x_{\max} \in D$ mit $f(x_{\max}) \geq f(x)$ für alle $x \in D$
 - ▶ **Minimalstelle** oder **globales Minimum**:
 $x_{\min} \in D$ mit $f(x_{\min}) \leq f(x)$ für alle $x \in D$
 - ▶ $x^* \in D$ mit $f(x^*) \begin{matrix} \geq \\ (\leq) \end{matrix} f(x)$ für $x \in [x^* - a, x^* + a] \subseteq D$
heißt **lokale Maximalstelle** (Minimalstelle), $f(x^*)$ lokales Maximum
- ▶ Weitere Sprechweisen: Extremal-, Optimalstelle, Extremum, Optimum



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

- ▶ **Umsatzmaximierung** für zwei Produkte mit Absatzquantitäten x_1, x_2 und Preisen p_1, p_2 :

- ▶ Gegeben:

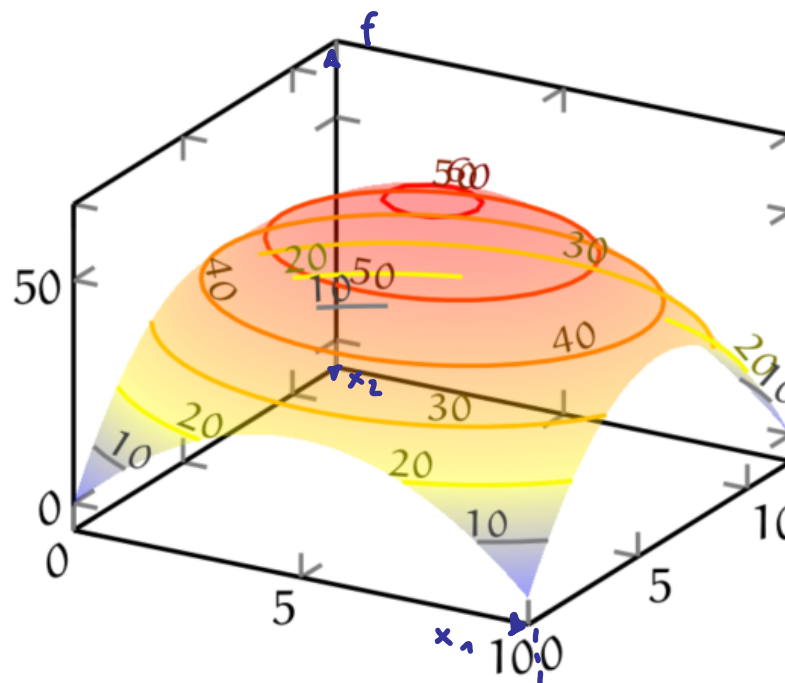
Preis-Absatz-Funktionen

$$x_1 = 10 - p_1$$

$$\text{und } x_2 = 12 - p_2$$

- ▶ Wegen $x_1, x_2 \geq 0$ und $p_1, p_2 \geq 0$ folgt $p_1 \in [0, 10]$ und $p_2 \in [0, 12]$

- ▶ Gesamtumsatz?
- ▶ Maximalstelle?
- ▶ Minimalstellen?



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



- ▶ f **beschränkt** \Leftrightarrow es gibt $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \leq f(x) \leq c_1$
- ▶ f **monoton wachsend** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
- ▶ f **monoton fallend** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
- ▶ bei **strenger** Monotonie entfällt „=“
- ▶ f **konvex** $\Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2))$
- ▶ f **konkav** $\Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2))$
- ▶ $\lambda \in (0,1)$
- ▶ bei **strenger** Konkavität entfällt „=“
- ▶ f **periodisch** mit Periode $p > 0$ $\Leftrightarrow f(x) = f(x \pm p)$
- ▶ f **gerade (ungerade)** $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) (-f(x) = f(-x))$

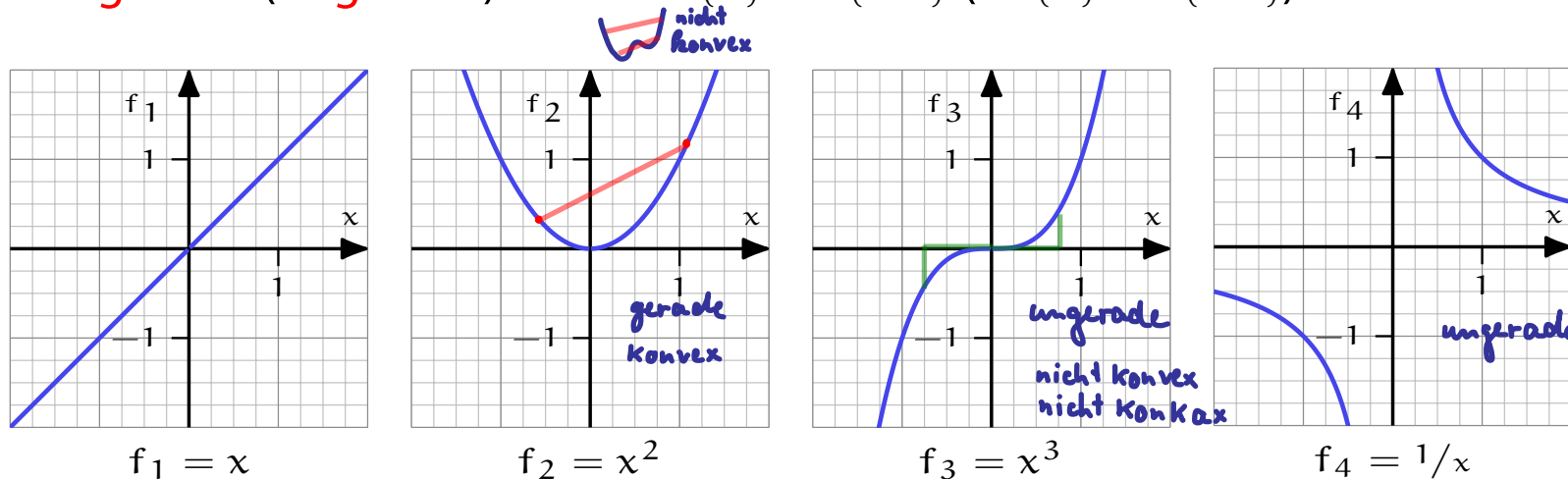


Abbildung: Graphen einiger Funktionen

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



Definition

- ▶ $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0)$$

- ▶ heißt **Polynom n-ten Grades**
- ▶ Schreibweise: $\text{grad}(p) = n$

Satz

- ▶ Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- ▶ $p(x_1) = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{p(x)}{x-x_1}$ ist wieder Polynom mit $\text{grad}(u) = \text{grad}(p) - 1$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

Beispiel (Polynomdivision)

$$\begin{array}{r} (x^5 - 4.5x^4 + 5.5x^3 - 2x) : (x-1) = x^4 - 3.5x^3 + 2x^2 + 2x \\ -(x^5 - x^4) \\ \hline -3.5x^4 + 5.5x^3 - 2x \\ -(-3.5x^4 + 3.5x^3) \\ \hline 2x^3 - 2x \\ -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 2x \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline 0 \end{array}$$

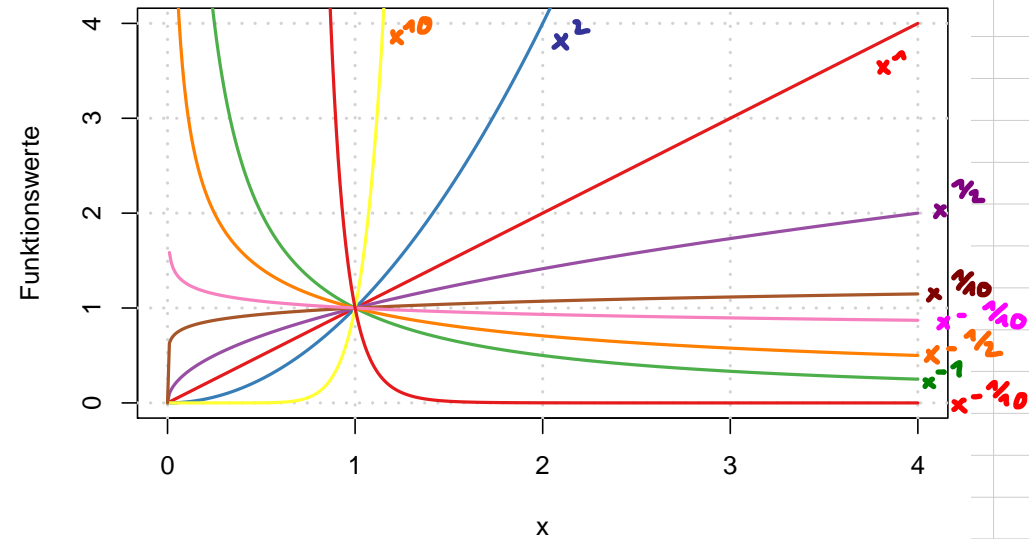
Beispiel (Rationale Funktionen)

Division (mit Rest)

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 4x + 4) : (x+1) = \underbrace{x^2 - 2x - 2}_{\text{Asymptote}} + \frac{6}{x+1} \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline -2x^2 - 4x + 4 \\ -(-2x^2 - 2x) \\ \hline -2x + 4 \\ -(-2x - 2) \\ \hline 6 \end{array}$$

$\rightarrow 0$
 $x \rightarrow \pm\infty$

\rightarrow Rest





Definition

▶ $q : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (\text{mit } p_1, p_2 (\neq 0) \text{ sind Polynome})$$

▶ heißt **Rationale Funktion**.

Satz

- ▶ Jedes Polynom ist auch rationale Funktion (z.B. $p_2(x) = c$).
- ▶ Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (falls definiert) von rationalen Funktionen sind wieder rationale Funktionen.

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



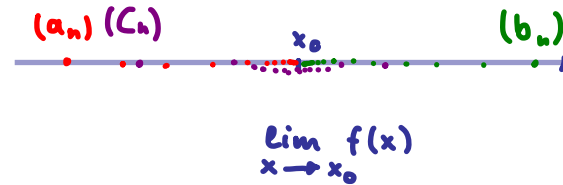
Potenzfunktion

- ▶ $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^a$, ($a \in \mathbb{R}$) heißt **Potenzfunktion**.
- ▶ f ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.
- ▶ Für $a \neq 0$ existiert eine inverse Funktion f^{-1} zu f

Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) heißt **Exponentialfunktion** zur Basis a .
- ▶ $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(y) = \log_a(y)$, ($a > 0$, $a \neq 1$) heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis a mit $g = f^{-1}$.
- ▶ Satz: f, g wachsen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $a < 1$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



Ausgangssituation

- ▶ Gegeben: Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- ▶ Grenzwert von f aufbauend auf Konvergenz von Zahlenfolgen
- ▶ Dazu betrachte: Alle Folgen $a^m = (a_1^m, \dots, a_n^m)^T \in D$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, also $a^m \rightarrow a$ für $m \rightarrow \infty$
- ▶ Untersuche Grenzwerte $\lim_{a^m \rightarrow a} f(a^m)$.

Definition des Grenzwerts einer Funktion

- ▶ f heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (die nicht notwendig zu D gehören muss) **konvergent gegen $\tilde{f} \in \mathbb{R}$** ,
- ▶ wenn
 1. mindestens eine Folge (a^m) mit $a^m \in D$, $a^m \neq a$ und $a^m \rightarrow a$ existiert (d.h. a ist kein „isolierter Punkt“)
 2. für alle Folgen (a^m) mit $a^m \in D$ und $a^m \rightarrow a$ gilt $f(a^m) \rightarrow \tilde{f}$.
- ▶ \tilde{f} heißt dann **Grenzwert** von $f(a^m)$.

Schreibweise für alle gegen a konvergierende Folgen (a^m) :

$$\lim_{a^m \rightarrow a} f(a^m) = \tilde{f} \quad \text{oder kurz} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \tilde{f}$$



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

2016WS_HSA_WiMa_Funktionen_16_11_09.R

ste

Wed Nov 09 16:02:29 2016

```
# 2.11.2016
```

```
# R Skript zur VL WiMa
```

```
# Funktionsgraphen
```

```
# Polynome
```

```
polynom1 = function(x) {x^2}
```

```
polynom2 = function(x) {-0.5*x^2 + x + 1}
```

```
polynom3 = function(x) {x^5-4.5* x^4 + 5.5* x^3-2* x}
```

```
plot(c(-1,3), c(-1,2), type="n",
```

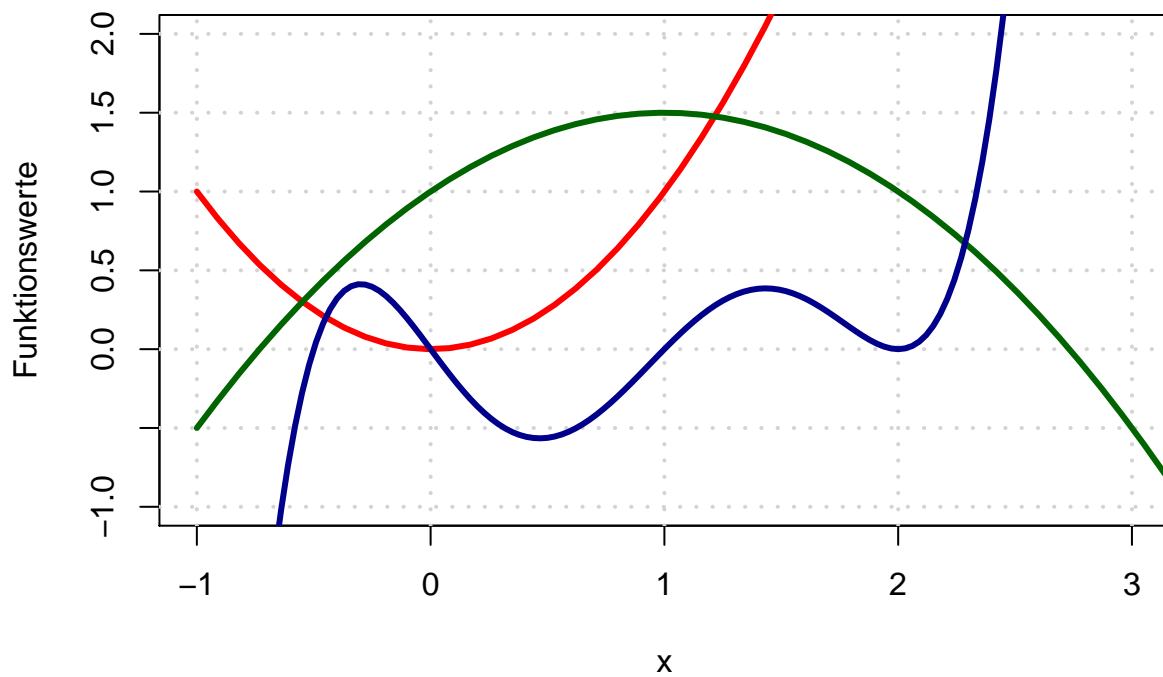
```
      xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
```

```
grid(lwd=2) # lwd: line width
```

```
curve(polynom1, from=-1, to=8, lwd=3, col="red", add=TRUE)
```

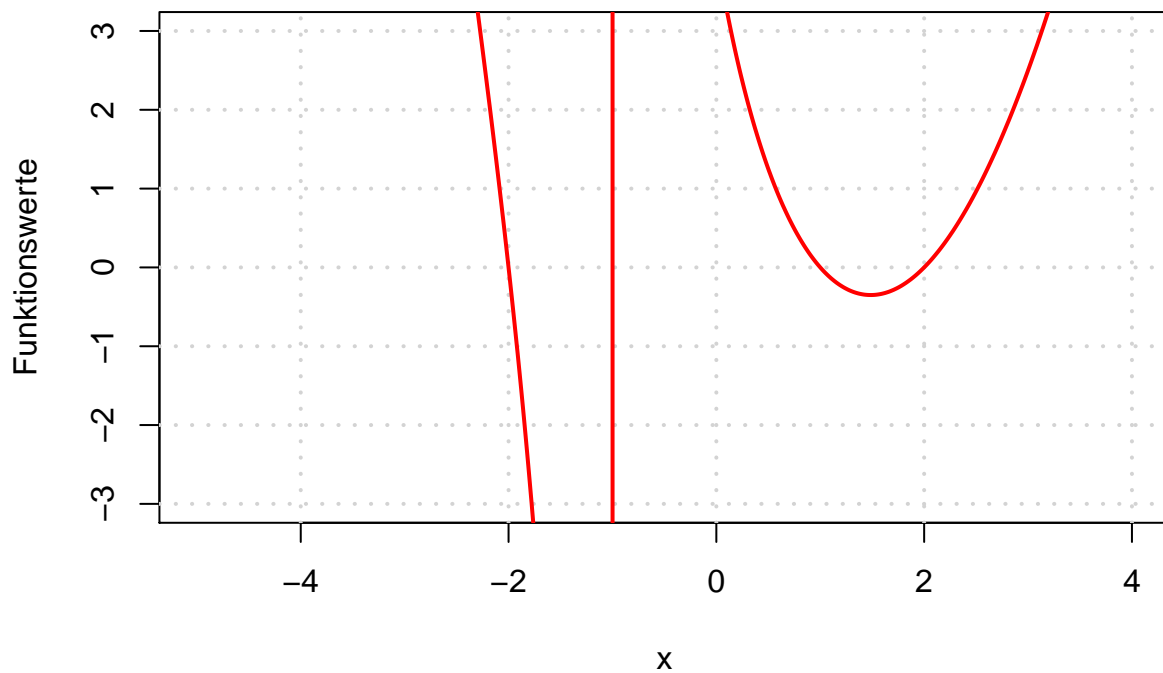
```
curve(polynom2, from=-1, to=8, lwd=3, col="darkgreen", add=TRUE)
```

```
curve(polynom3, from=-1, to=8, lwd=3, col="darkblue", add=TRUE, n=301)
```

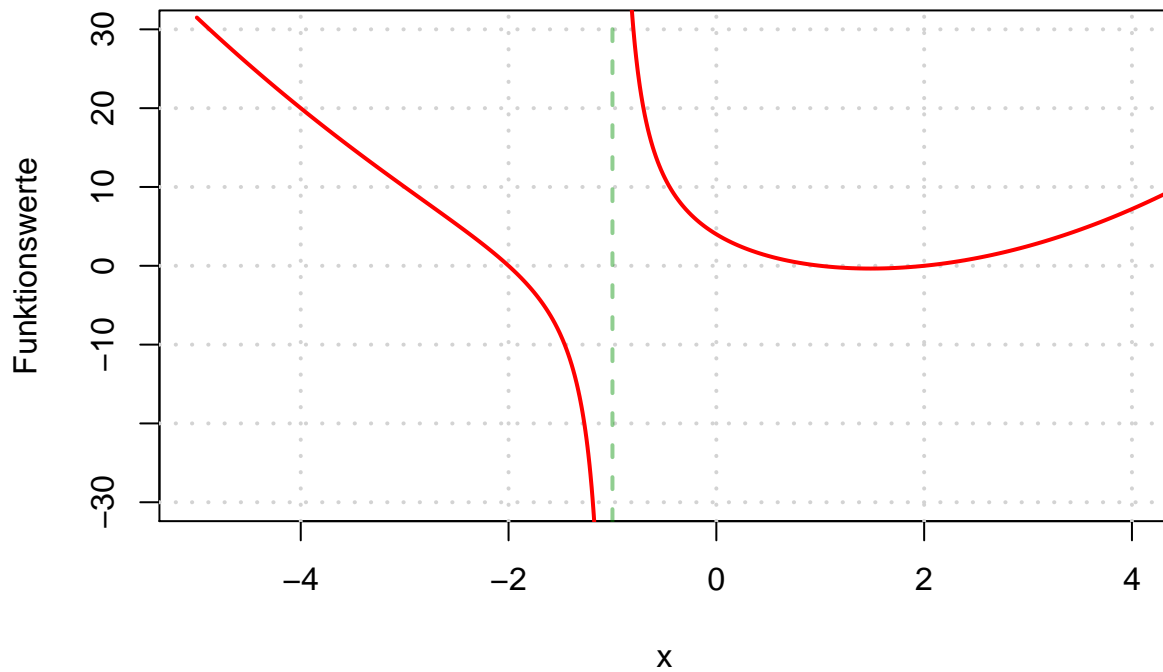



```
# Rationale Funktion
```

```
Rational1 = function(x) {(x^3-x^2-4*x+4)/(x+1)}  
plot(c(-5,4), c(-3,3), type="n",  
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem  
grid(lwd=2)                          # lwd: line width  
curve(Rational1, from=-5, to=4, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
```



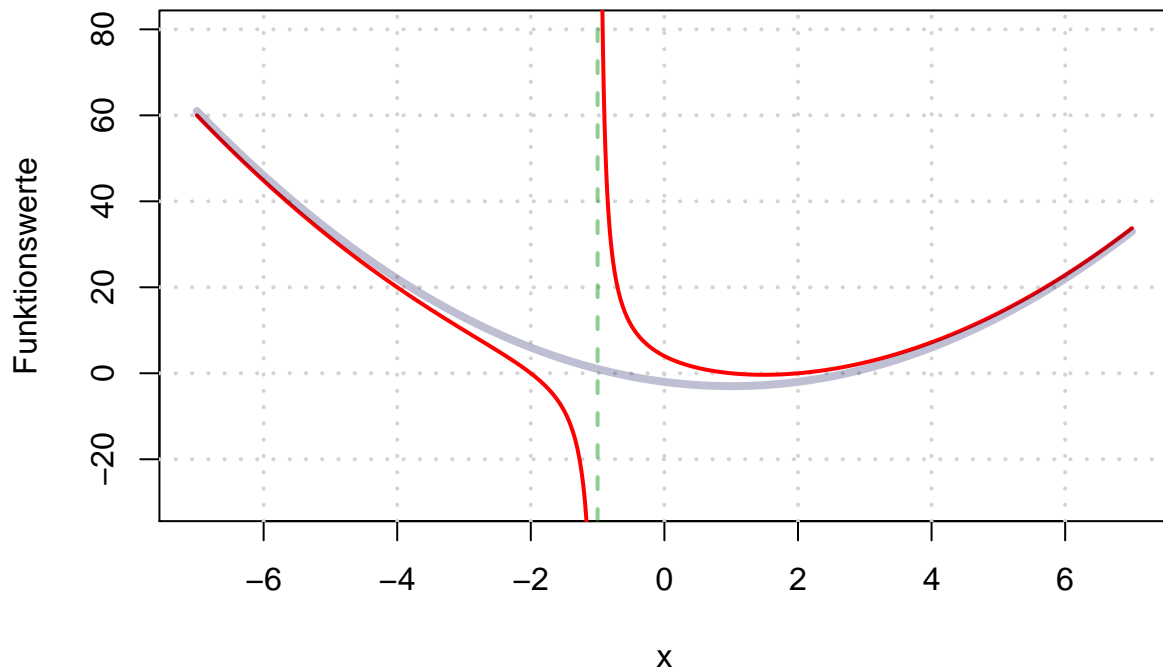
```
# Pol bei x=-1  
plot(c(-5,4), c(-30,30), type="n",  
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem  
grid(lwd=2)                          # lwd: line width  
curve(Rational1, from=-5, to=-1, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)  
curve(Rational1, from=-1, to=5, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)  
abline(v = -1, lty=2, lwd=2, col="#00900070")
```



```

# Asymptote (Polynom nach Division, ohne Rest)
Asymptote = function(x) {x^2-2*x-2}
plot(c(-7,7), c(-30,80), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                          # lwd: line width
curve(Rational1, from=-7, to=-1, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
curve(Rational1, from=-1, to=7, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
abline(v = -1, lty=2, lwd=2, col="#00900070")
curve(Asymptote, from=-7, to=7, lwd=4, col="#00005040", add=TRUE)

```



```
# Potenzfunktionen
```

```
PotenzGraph = function(a=1, Farbe="red") {
  curve(x^a, from=0, to=4, lwd=2, col=Farbe, add=TRUE, n=401)
}
```

```
plot(c(0,4), c(0,4), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2) # lwd: line width
```

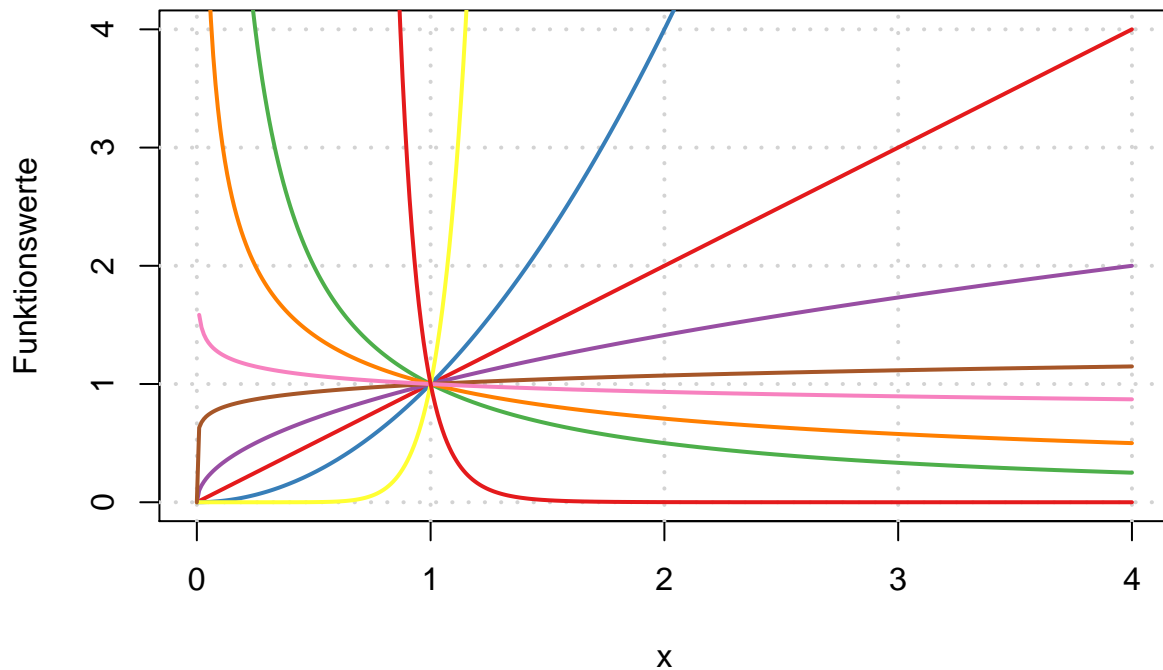
```
# RColorBrewer
```

```
# install.packages("RColorBrewer")
```

```
library(RColorBrewer)
```

```
## Warning: package 'RColorBrewer' was built under R version 3.3.2
```

```
Farben = brewer.pal(9,"Set1")
PotenzGraph(a=1, Farbe=Farben[1])
PotenzGraph(a=2, Farbe=Farben[2])
PotenzGraph(a=-1, Farbe=Farben[3])
PotenzGraph(a=0.5, Farbe=Farben[4])
PotenzGraph(a=-0.5, Farbe=Farben[5])
PotenzGraph(a=10, Farbe=Farben[6])
PotenzGraph(a=0.1, Farbe=Farben[7])
PotenzGraph(a=-0.1, Farbe=Farben[8])
PotenzGraph(a=-10, Farbe=Farben[1])
```



Exponential- und Logarithmusfunktionen

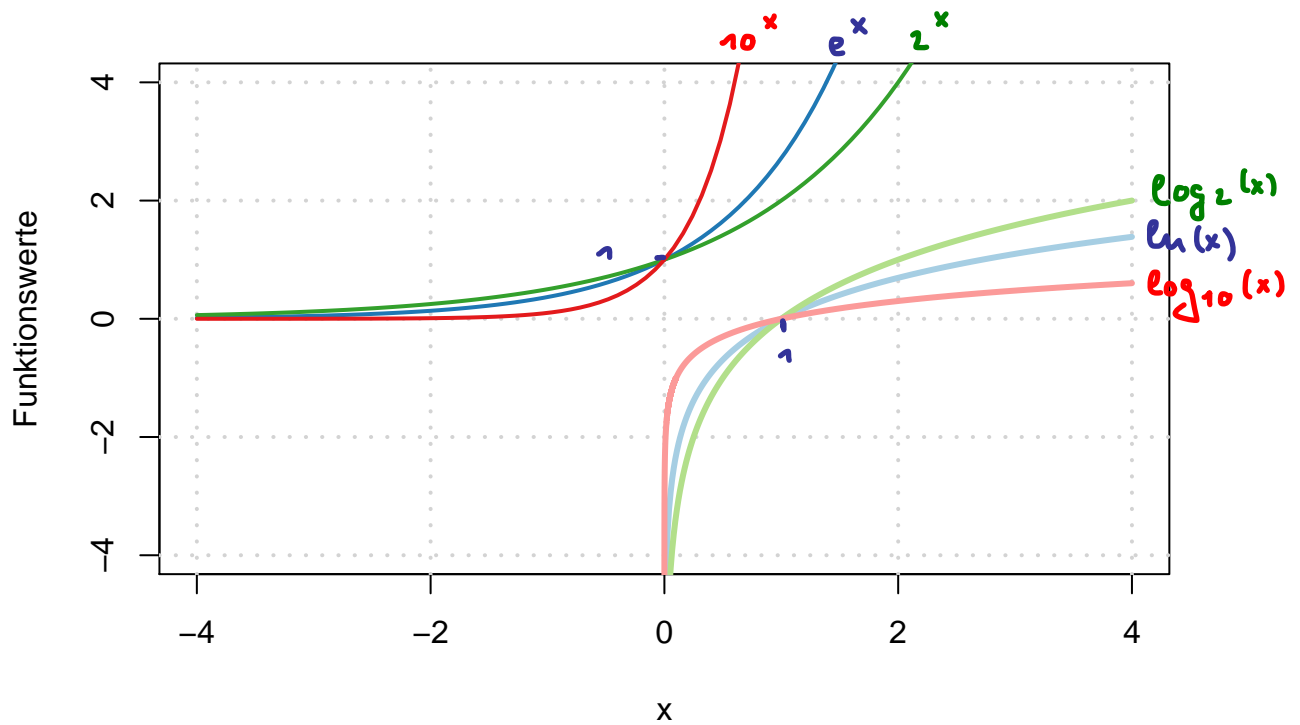
```
plot(c(-4,4), c(-4,4), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                          # lwd: line width

Farben = brewer.pal(9,"Paired")

# Logarithmus naturalis und e-Funktion
curve(log(x), from=0, to=4, lwd=3, col=Farben[1], add=TRUE, n=301)
curve(exp(x), from=-4, to=4, lwd=2, col=Farben[2], add=TRUE)

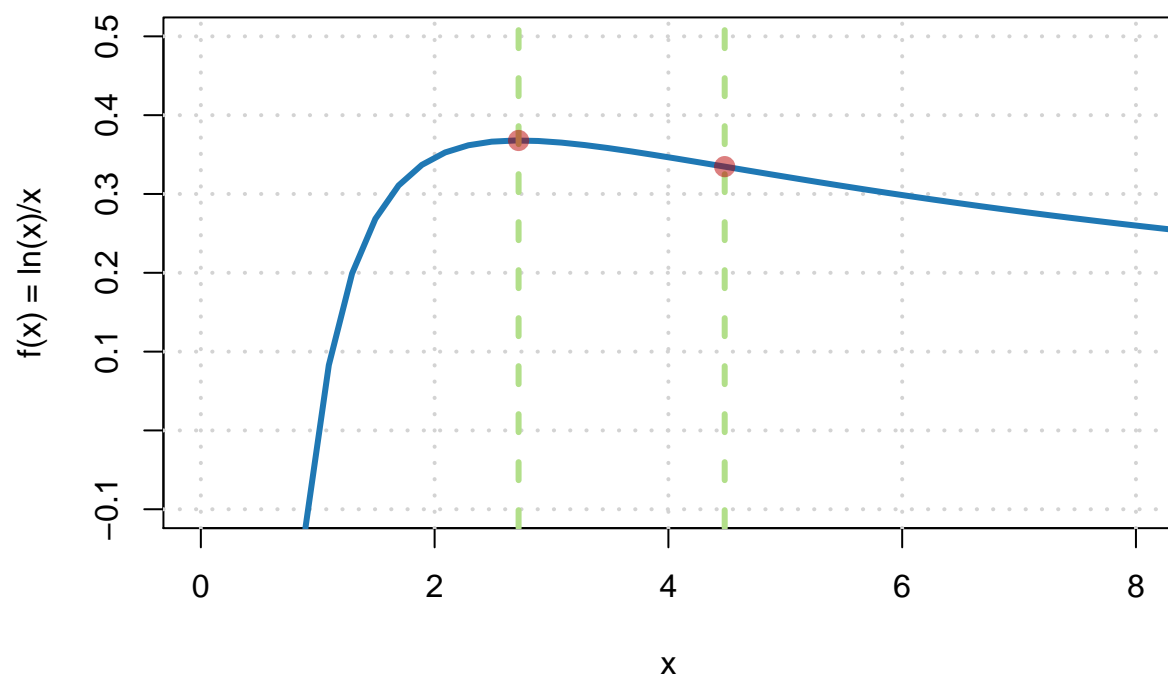
# Basis 2
curve(log(x)/log(2), from=0, to=4, lwd=3, col=Farben[3], add=TRUE, n=301)
curve(2^x, from=-4, to=4, lwd=2, col=Farben[4], add=TRUE)

# Basis 10
curve(log(x)/log(10), from=0, to=0.1, lwd=3, col=Farben[5], add=TRUE, n=3001)
curve(log(x)/log(10), from=0.1, to=4, lwd=3, col=Farben[5], add=TRUE, n=301)
curve(10^x, from=-4, to=4, lwd=2, col=Farben[6], add=TRUE)
```



Beispiel Monotonie/Konvexität

```
f = function(x) {log(x)/x}
plot(c(0,8), c(-0.1,0.5), type="n",
     xlab="x", ylab="f(x) = ln(x)/x") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                          # lwd: line width
curve(f, from=0.1, to=20, lwd=3, col=Farben[2], add=TRUE)
x = c(exp(1), exp(3/2))
abline(v = x, lty=2, lwd=3, col=Farben[3])
points(x, f(x), pch=20, col="#bb000080", cex=2)
```



Gegeben

- ▶ Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

- ▶ f heißt **stetig in x_0** $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- ▶ f heißt **stetig in $T \subseteq D$** $\Leftrightarrow f$ ist für alle $x \in T$ stetig
- ▶ Ist f für ein $\tilde{x} \in D$ nicht stetig, so heißt \tilde{x} **Unstetigkeitsstelle** oder **Sprungstelle**

Satz

- ▶ Für stetige Funktionen f, g gilt:
 - $f \pm g, f \cdot g, f/g$ ($g(x) \neq 0$) sind stetig
 - $|f|, f \circ g$, sind stetig
 - Falls f auf einem Intervall definiert und invertierbar: f^{-1} stetig
- ▶ Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

Beispiel Stetigkeit

geg.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 1 \\ 2x & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$(+, -, \cdot, :, \dots, 0^+)$

Satz: Jede Komposition elementarer Funktionen
(Polynome, rationale F., Potenzf., Log.f.)
sind im Def. bereich stetig

d.h. hier: f ist stetig für $x \neq 1, 3$ (siehe Satz)

$$x=1: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = 2$$

Annäherung von links
(bzw. von unten)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = 2 = f(1)$$

von rechts

$\Rightarrow f$ ist stetig bei $x=1$

$$x=3: \lim_{x \nearrow 3} f(x) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\lim_{x \searrow 3} f(x) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

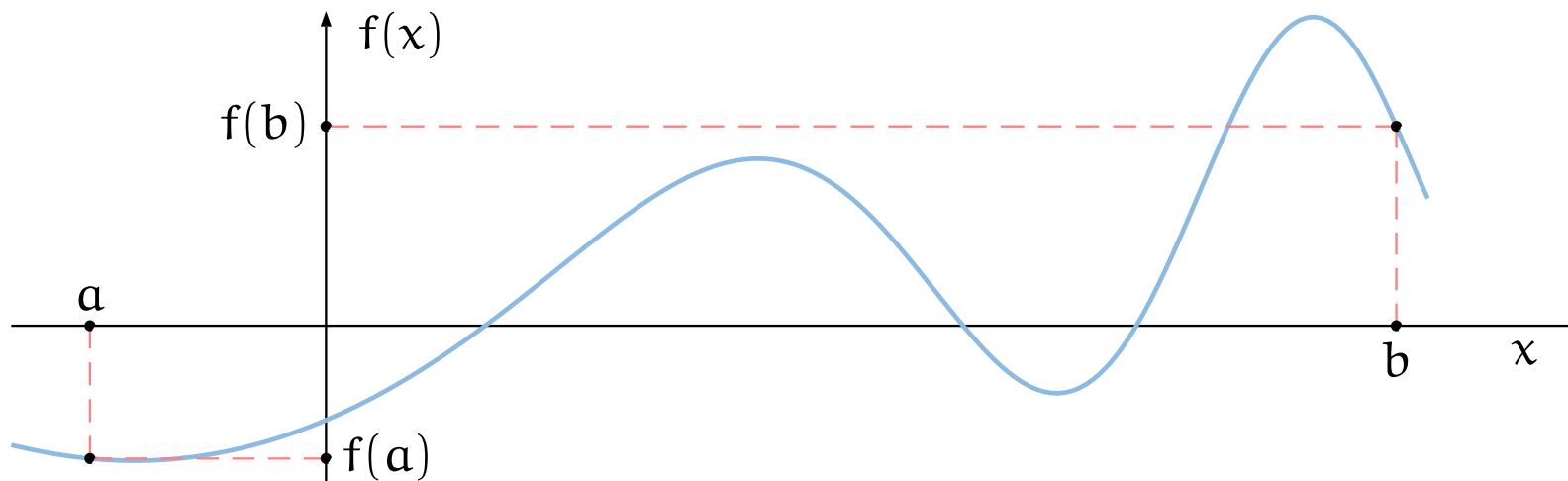
nicht
gleich

$\Rightarrow f$ ist nichtstetig für $x=3$



- ▶ Gegeben: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
- ▶ Dann gilt:

$$f(a) < f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a, b] \quad \text{mit } f(x) = y$$



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
 - 5.1. Grundbegriffe
 - 5.2. Elementare Funktionen
 - 5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

- 1 Grundlegende Bausteine
- 2 Aussagenlogik
- 3 Mengen
- 4 Folgen und Reihen
- 5 Reelle Funktionen
- 6 Differentialrechnung
- 7 Integration
- 8 Finanzmathematik
- 9 Lineare Algebra
- 10 Lineare Programme



- 6 Differentialrechnung
Differentialquotient und Ableitung
Änderungsrate und Elastizität
Kurvendiskussion



Anwendungen

- ▶ Analyse und ökonomische Interpretation wirtschaftswissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten durch Untersuchung der Charakteristika von Funktionen
- ▶ Ermittlung von optimalen Lösungen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme wie zum Beispiel Absatzmengenplanung, Loßgrößenplanung etc.

Wesentliche Lernziele

- ▶ Verständnis des **Differentialquotienten**
- ▶ Fähigkeit, eine Funktion zu **differenzieren**
- ▶ Bestimmung und Interpretation von **Änderungsraten** und **Elastizitäten**
- ▶ Durchführung und Interpretation von **Kurvendiskussionen**

1. Grundlagen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

6.1. Differentialquotient und Ableitung

6.2. Änderungsrate und Elastizität

6.3. Kurvendiskussion

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Bekannt sind folgende Zusammenhänge:

- ▶ $p(x) = c_1 - c_2x$ (Preis-Absatz-Funktion)
- ▶ $K(x) = c_3 + c_4x$ (Kostenfunktion)
- ▶ (mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ Konstanten)

Damit ergibt sich:

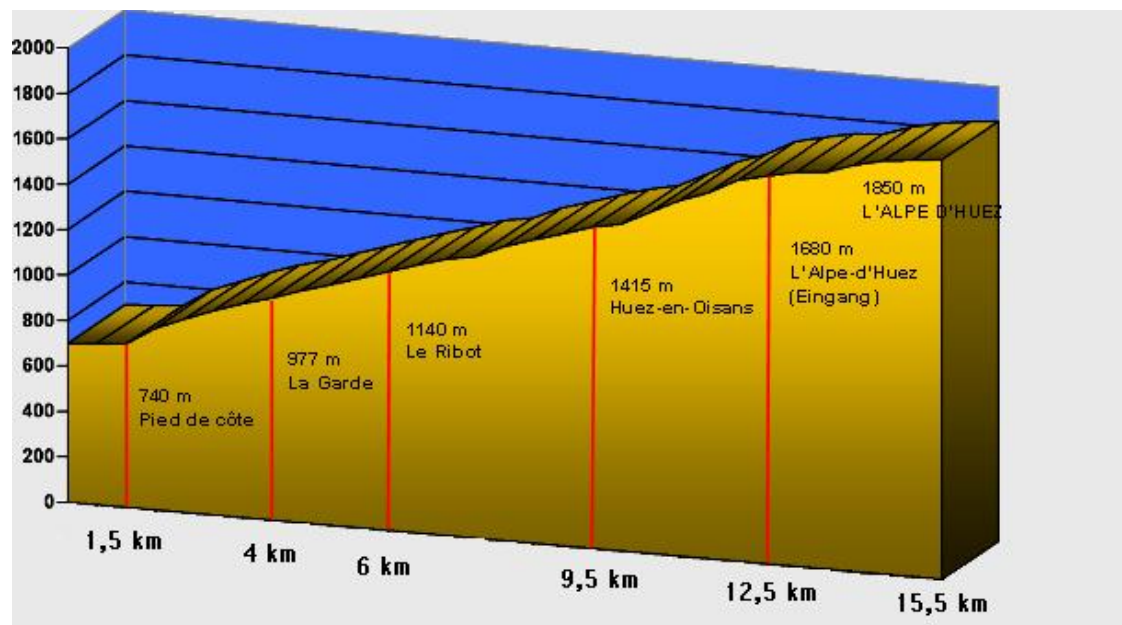
- ▶ Umsatzfunktion: $U(x) = c_1x - c_2x^2$
- ▶ Gewinnfunktion: $G(x) = U(x) - K(x) = c_1x - c_2x^2 - (c_3 + c_4x)$

Fragen:

- ▶ Welche Menge/Welcher Preis ist Umsatz-/Gewinnmaximal?
- ▶ Welche Veränderung des Umsatzes ergibt sich bei einer Veränderung der Absatzmenge?

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
 - 6.1. Differentialquotient und Ableitung
 - 6.2. Änderungsrate und Elastizität
 - 6.3. Kurvendiskussion
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

- ▶ Tour de France: Anstieg nach L'Alpe d'Huez
- ▶ Länge des Anstiegs: 13,9 km
- ▶ Auf einer Höhe von 740 m beginnen die 21 Kehren
- ▶ Zielankunft liegt auf 1850 m
- ▶ Bestimmung von Steigungen: $\frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Distanz}}$



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
 - 6.1. Differentialquotient und Ableitung
 - 6.2. Änderungsrate und Elastizität
 - 6.3. Kurvendiskussion
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

- ▶ Gegeben: Reelle Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$
- ▶ Dann heißt der Ausdruck

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Differenzenquotient (Steigung) von f im Intervall $[x_1, x_2] \subseteq D$

- ▶ Alternative Schreibweise, dabei Ersetzen von x_2 durch $x_1 + \Delta x_1$:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

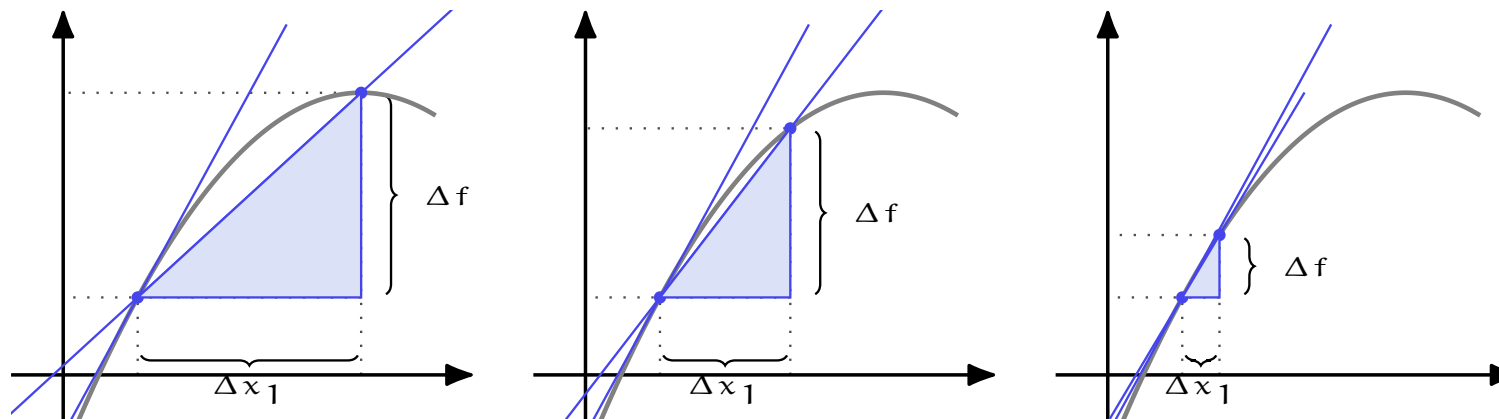
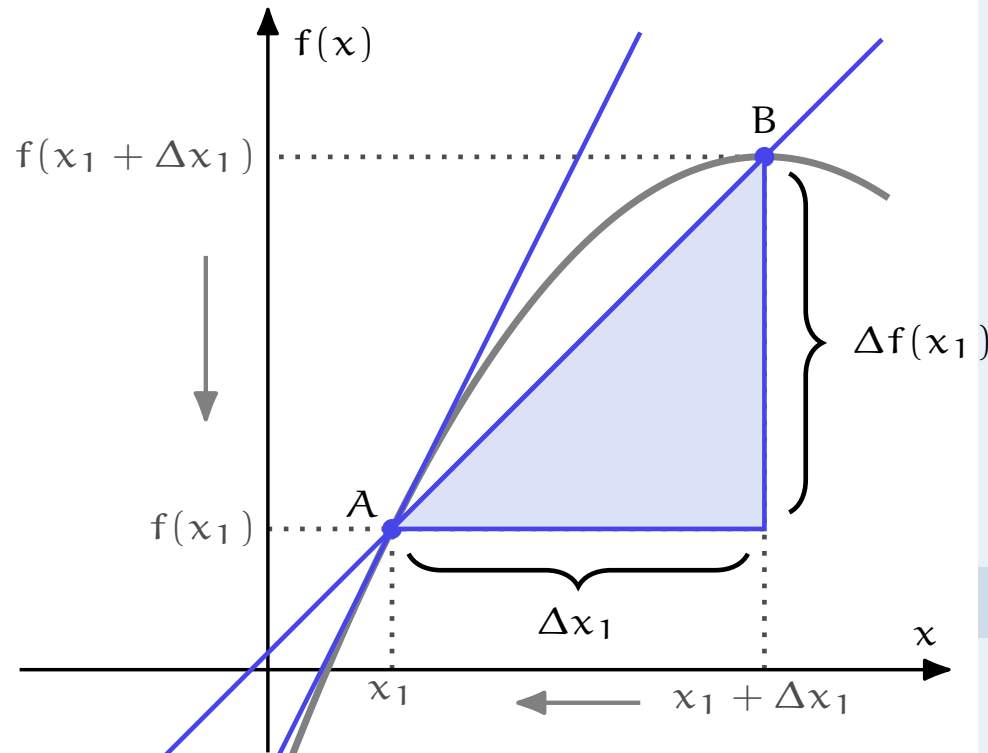


Abbildung: Differentialquotient einer reellen Funktion



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
 - 6.1. Differentialquotient und Ableitung
 - 6.2. Änderungsrate und Elastizität
 - 6.3. Kurvendiskussion
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

- ▶ Eine reelle Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt **an der Stelle $x_1 \in D$ differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

existiert.

- ▶ Ist f an der Stelle x_1 differenzierbar, heißt

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \frac{df}{dx_1}(x_1) = f'(x_1) \end{aligned}$$

Differentialquotient oder erste Ableitung von f an der Stelle x_1 .

- ▶ f heißt **in D differenzierbar**, wenn f für alle $x \in D$ differenzierbar ist.



G. W. Leibniz
(1646-1716)



I. Newton
(1643-1727)



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



- ▶ Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (soweit definiert) von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar.
- ▶ **Summenregel:**

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[x^5 + \ln x]' = [x^5]' + [\ln x]'$$

$$= 5x^4 + \frac{1}{x}$$

- ▶ **Produktregel:**

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\underbrace{(\ln(x))}' \cdot \underbrace{x^{-1}}' = \frac{1}{x} \cdot x^{-1} + \ln(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

- ▶ Daraus ergibt sich für eine Konstante c : $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

- ▶ **Quotientenregel:**

NAZ - ZAU

$$\left(\frac{z}{n}\right)'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

- ▶ **Kettenregel:**

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$[\ln(x^3 + \frac{1}{x})]' = \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x}} \cdot (3x^2 - x^{-2})$$

nachdifferenzieren
(nicht vergessen!)

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
 - 6.1. Differentialquotient und Ableitung
 - 6.2. Änderungsrate und Elastizität
 - 6.3. Kurvendiskussion
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme



Gegeben: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
x^b	$b x^{b-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

1. Grundlagen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

6.1. Differentialquotient und Ableitung

6.2. Änderungsrate und Elastizität

6.3. Kurvendiskussion

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme