Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Hausaufgaben

r

Grundlagentest
Gleichungen!

Testfrage: Gleichungen 1

Quadratische Gleichung

Falls $a, x \neq 0$ sind für die Gleichung

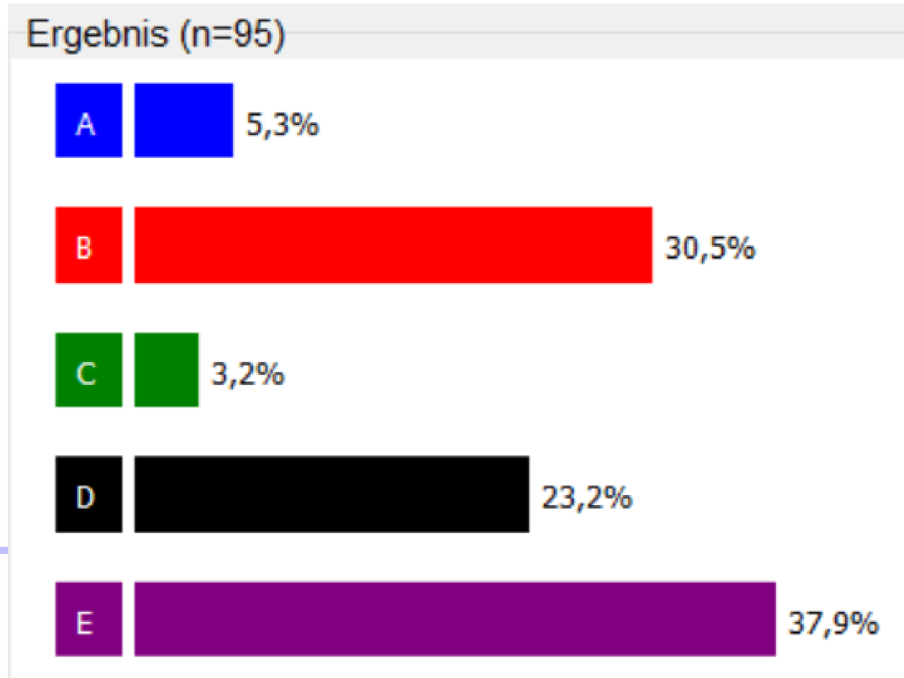
$$x - a = \frac{2a^2}{x}$$

in Abhängigkeit von a folgende $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung:

$$x^2 - ax - 2a^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}\right) = \frac{a}{2}(1 \pm 3) = \begin{cases} 2a \\ -a \end{cases}$$

- A: a
- B: $2a$ und $-a$
- C: $3{,}5a$ und $-2{,}5a$
- D: es gibt keine Lösung
- E: Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: B

Testfrage: Gleichungen 2

Die Gleichung

$$\frac{x-6}{1-x} + \frac{5}{(1-x)(x-6)} = \frac{x-7}{x-6}$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

$x \neq 1, 6$

HN: $(1-x)(x-6)$

- A $\mathbb{L} = \{6, 4\}$
- B $\mathbb{L} = \{6, 1\}$
- C $\mathbb{L} = \{1\}$
- D $\mathbb{L} = \{4\}$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

$\Leftrightarrow (x-6)^2 + 5 = (x-7)(1-x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + 5 = -x^2 + 8x - 7$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 24}\right) = 5 \pm 1 = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$

aber: x kann nicht 6 sein, also

$L = \{4\}$

Richtig: D

	Antwort A	Antwort B	Antwort C	Antwort D	Antwort E	Gesamt
09.11.2016 14:45:42	18 (23%)	11 (14%)	6 (8%)	7 (9%)	37 (47%)	79

Betragsgleichung

Die Gleichung

$$|x-3| - |2x+4| = 0$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

- **A** $\mathbb{L} = \{3, -2\}$
- **B** $\mathbb{L} = \{-7\}$
- **C** $\mathbb{L} = \{-7, -\frac{1}{3}\}$
- **D** $\mathbb{L} = \{3\}$
- **E** Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

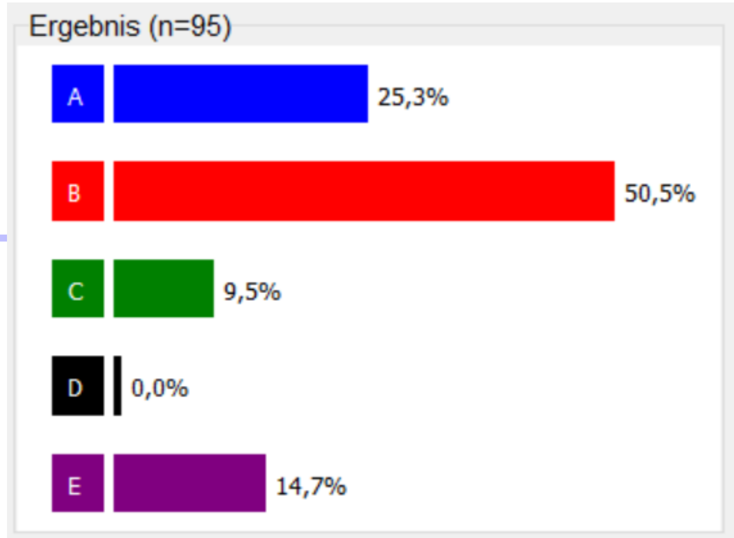
$$|x-3| = |2x+4|$$

$$\Leftrightarrow \quad x-3 = 2x+4 \quad \vee \quad x-3 = -(2x+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 = x \quad \vee \quad 3x = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -7 \quad \vee \quad x = -\tfrac{1}{3}$$

Richtig: C



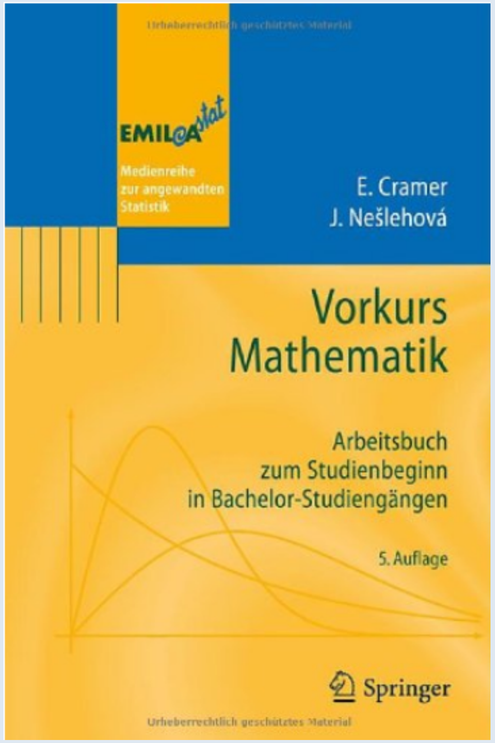
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Sie wirken ausgeglichen!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.12 - 6.19!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.8 - 6.19!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.1 - 6.19!

Übungsmaterial

Aufgaben 6.1 - 6.19 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differentialrechnung
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

5 Reelle Funktionen

- Grundbegriffe
- Elementare Funktionen
- Stetigkeit reeller Funktionen

Warum beschäftigen wir uns mit reellen Funktionen?

- allgemein: kompakte und präzise Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Faktoren
- speziell: Modellierung technischer und ökonomischer Systeme
- Basis für Analyse und Optimierung von Systemen / Prozessen

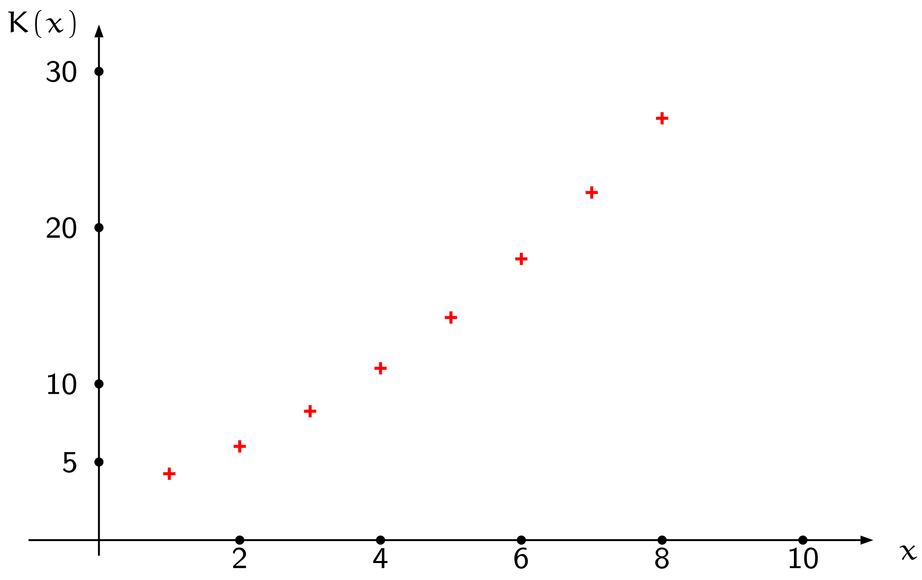
Wesentliche Lernziele

- Fähigkeit mit den wesentlichen Begriffen im Zusammenhang mit Funktionen umzugehen
- Kennenlernen der wichtigsten Klassen reeller Funktionen
- Beherrschen des Stetigkeitsbegriffs

Beispiel

Kostenfunktion

- Jetzt: Betrachte zusätzlich Funktion $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$
- für Definitionsbereich $D = \{1, \ldots, 8\}$



- Darstellung durch Funktion: kompakt, eindeutig
- Möglicher Ausgangspunkt für Prognosen (Kosten für $9, 10, \ldots$ Einheiten)

Begriff reelle Funktion

Definition

- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt reellwertige Abbildung mit Definitionsbereich D
- Mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt f reelle Funktion von n Variablen

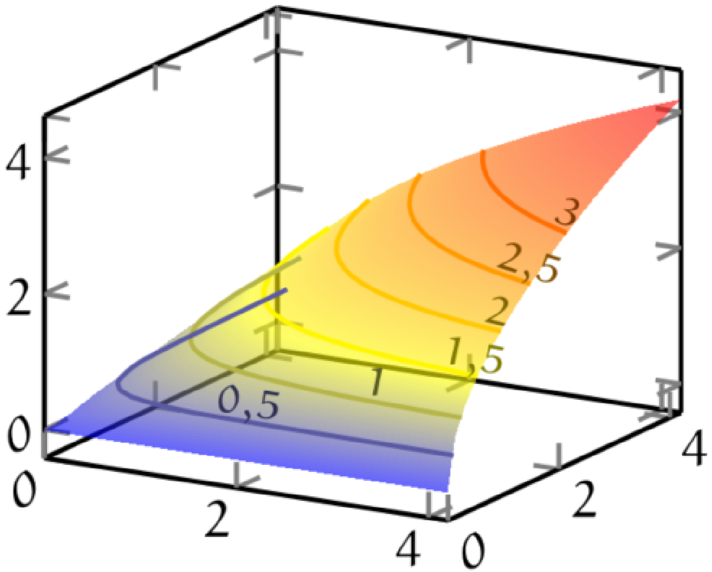
Darstellung von Funktionen

- Durch Funktionsgleichungen $f(x_1, \ldots, x_n) = y$
  - $x = (x_1, \ldots, x_n)$: unabhängige (exogene) Variablen
  - y: abhängige (endogene) Variablen
- Durch Wertetabellen
- Durch Graphen
  - Für $D \subseteq \mathbb{R}$: Darstellung im kartesischen Koordinatensystem
  - Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$: 3-dimensionale Darstellung oder Niveaulinien $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Cobb-Douglas-Funktion

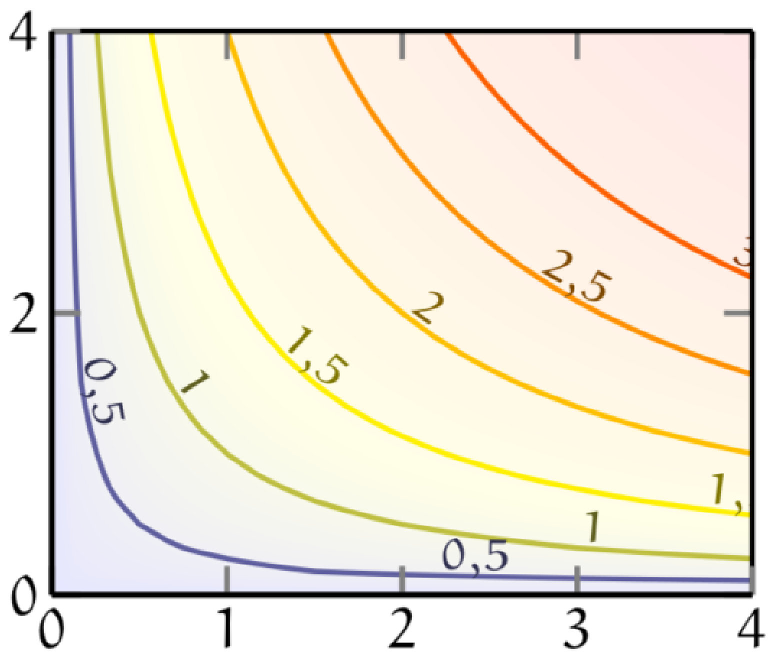
- neoklassische Produktionsfunktion der Form
  $$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots x_n^{a_n}$$
- Beispiel für zwei Produktionsfaktoren
  $$f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Dreidimensionale Darstellung



Niveaulinien

für $f(x_1, x_2) = c$ mit $c = 1/2, \ldots, 3$



Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ für alle $x \in D_f$

Inverse Funktion / Umkehrfunktion

- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- Inverse Funktion: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird

Invertierung: Beispiel

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \qquad x \mapsto f_1(x) = 2x - 3 = y$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \qquad x \mapsto f_2(x) = x^3 = y$$

Damit ebenfalls bijektiv: Inverse Abbildungen $f_1^{-1}, f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y \mapsto {f_1}^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}(y+3) = x$$

$$y \mapsto {f_2}^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = x$$

$y = x^3$
$\Leftrightarrow \; x = \sqrt[3]{y}$

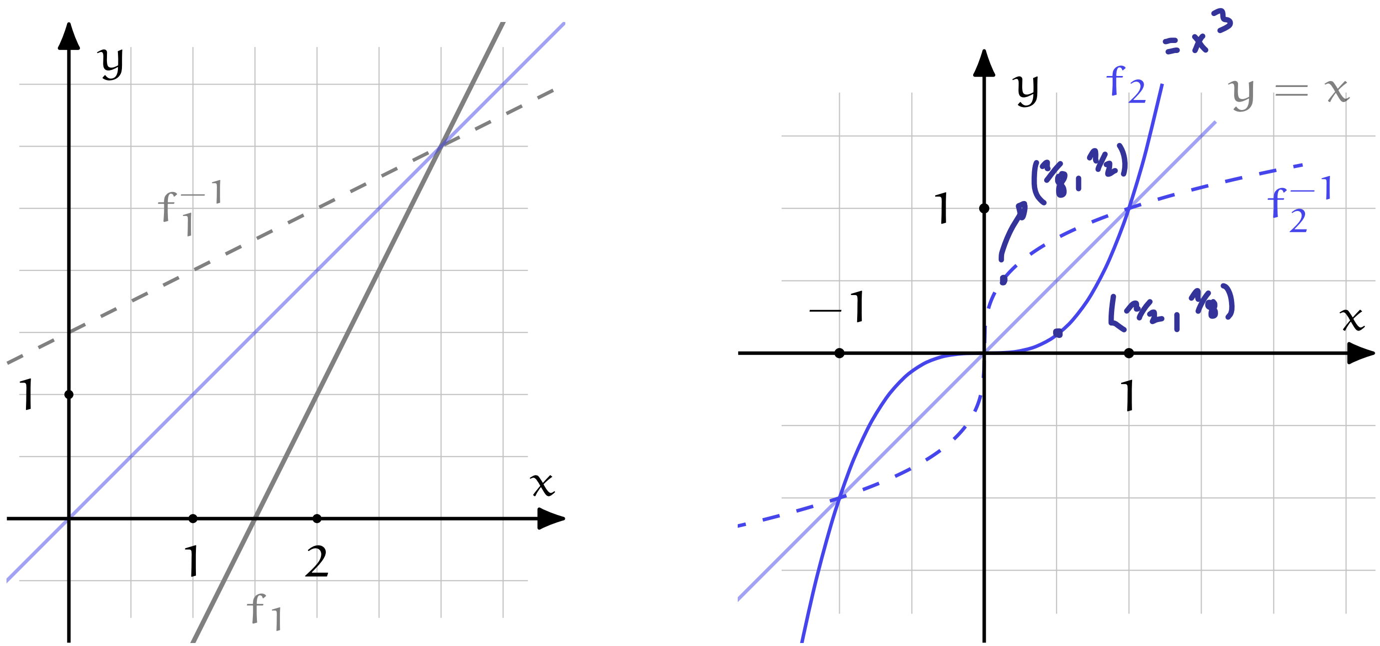


Abbildung: Graphen der Abbildungen f_1, f_2, ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$

Satz: Operationen zwischen Funktionen

- Gegeben: $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit identischem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Dann sind auch die folgenden Abbildungen relle Funktionen:

$$
\begin{array}{llcll}
f+g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\[2ex]
f-g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\[2ex]
f \cdot g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\[2ex]
\dfrac{f}{g}: & D_1 \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D_1 & \mapsto \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}
\end{array}
$$

$$D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

Besondere Punkte bei Funktionen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Definitionen

- c-Stelle von f: $x_c \in D$ mit $f(x_c) = c$
- Mit $c = 0$ heißt c-Stelle dann 0-Stelle von f
- Maximalstelle oder globales Maximum:
  $x_{\text{max}} \in D$ mit $f(x_{\text{max}}) \geqslant f(x)$ für alle $x \in D$
- Minimalstelle oder globales Minimum:
  $x_{\text{min}} \in D$ mit $f(x_{\text{min}}) \leqslant f(x)$ für alle $x \in D$
- $x^* \in D$ mit $f(x^*) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} f(x)$ für $x \in [x^* - a, x * + a] \subseteq D$
  heißt lokale Maximalstelle (Minimalstelle), $f(x^*)$ lokales Maximum

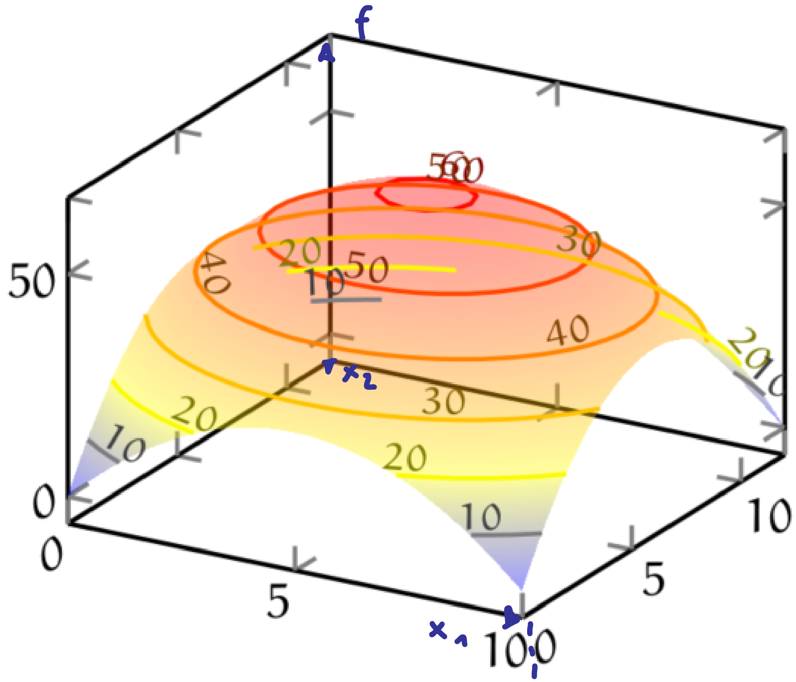
- Weitere Sprechweisen: Extremal-, Optimalstelle, Extremum, Optimum

Beispiel: Maximal-, bzw. Minimalstellen

- **Umsatzmaximierung** für zwei Produkte mit Absatzquantitäten x_1, x_2 und Preisen p_1, p_2:
- Gegeben:
  Preis-Absatz-Funktionen

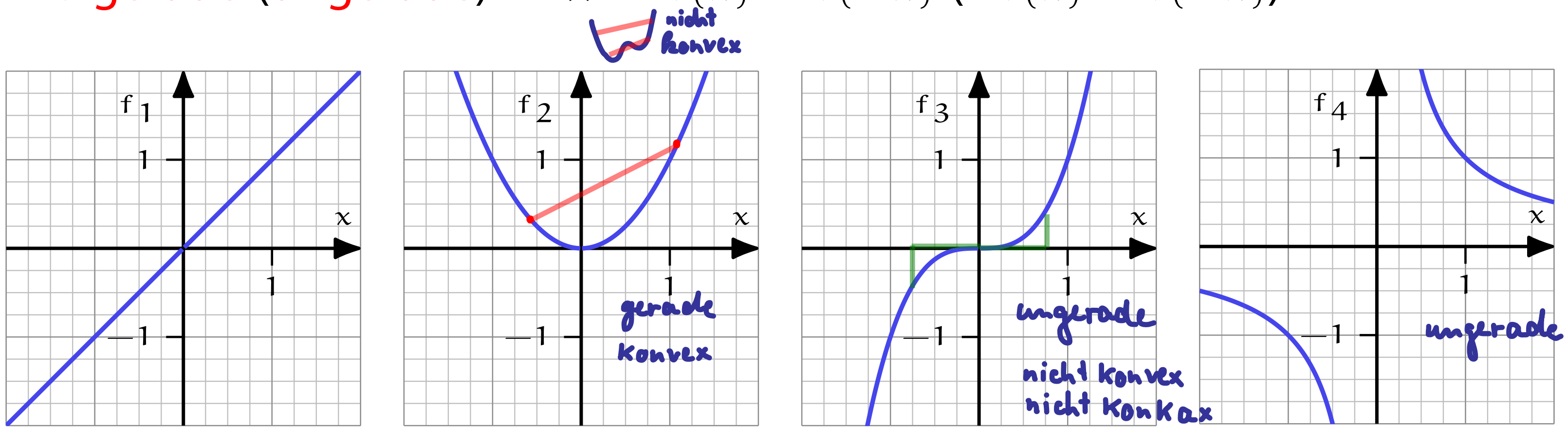
  $$x_1 = 10 - p_1$$

  und $x_2 = 12 - p_2$
- Wegen $x_1, x_2 \geqslant 0$ und $p_1, p_2 \geqslant 0$ folgt $p_1 \in [0, 10]$ und $p_2 \in [0, 12]$
- Gesamtumsatz?
- Maximalstelle?
- Minimalstellen?



Weitere Eigenschaften reeller Funktionen

- f beschränkt $\Leftrightarrow$ es gibt $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \leqslant f(x) \leqslant c_1$
- f monoton wachsend $\Leftrightarrow \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$
  f monoton fallend $\Leftrightarrow \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$
- bei strenger Monotonie entfällt „="
- f konvex $\Leftrightarrow \big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\big)$
  f konkav $\Leftrightarrow \big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\big)$
  $\lambda \in (0,1)$
- bei strenger Konkavität entfällt „="
- f periodisch mit Periode $p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(x \pm p)$
- f gerade (ungerade) $\Leftrightarrow \quad f(x) = f(-x) \ (-f(x) = f(-x))$



$f_1 = x \qquad f_2 = x^2 \qquad f_3 = x^3 \qquad f_4 = 1/x$

Abbildung: Graphen einiger Funktionen

Polynome

Definition

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0)$$

- heißt Polynom n-ten Grades
- Schreibweise: $\operatorname{grad}(p) = n$

Satz

- Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- $p(x_1) = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{p(x)}{x - x_1}$ ist wieder Polynom mit $\operatorname{grad}(u) = \operatorname{grad}(p) - 1$

Beispiel (Polynomdivision)

$$(x^5 - 4.5x^4 + 5.5x^3 - 2x) : (x-1) = x^4 - 3.5x^3 + 2x^2 + 2x$$

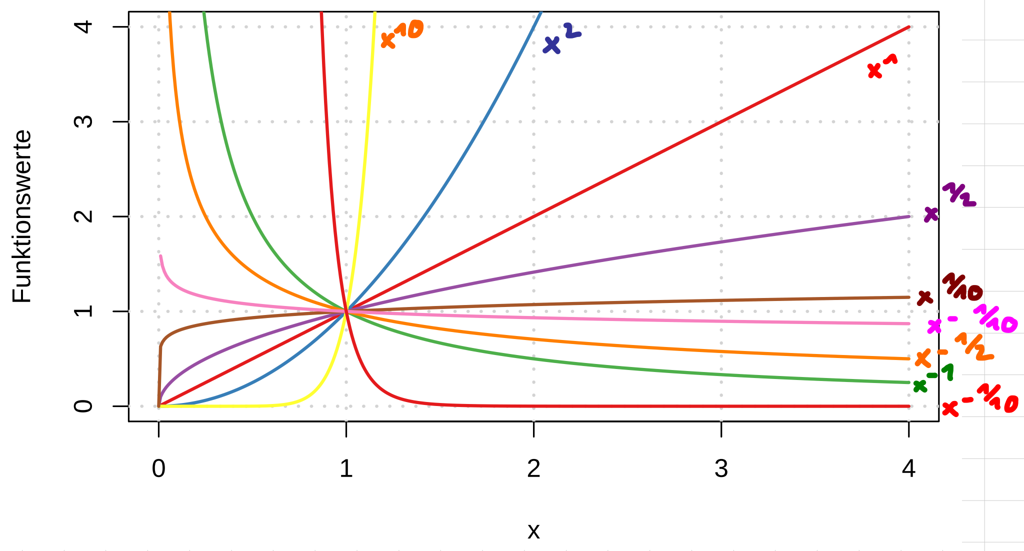
$$\begin{array}{l}
-(x^5 - x^4) \\
\hline
\quad -3.5x^4 + 5.5x^3 - 2x \\
\quad -(-3.5x^4 + 3.5x^3) \\
\hline
\qquad 2x^3 - 2x \\
\qquad -(2x^3 - 2x^2) \\
\hline
\qquad\quad 2x^2 - 2x \\
\qquad\quad -(2x^2 - 2x) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Beispiel (Rationale Funktionen)

Division (mit Rest)

$$(x^3 - x^2 - 4x + 4) : (x+1) = \underbrace{x^2 - 2x - 2}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{6}{x+1}}_{\to 0,\ x \to \pm\infty}$$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 + x^2) \\
\hline
\quad -2x^2 - 4x + 4 \\
\quad -(-2x^2 - 2x) \\
\hline
\qquad -2x + 4 \\
\qquad -(-2x - 2) \\
\hline
\qquad\quad 6 \rightarrow \text{Rest}
\end{array}$$



Rationale Funktionen

Definition

- $q : D \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (\text{mit } p_1, p_2 (\neq 0) \text{ sind Polynome})$$

- heißt Rationale Funktion.

Satz

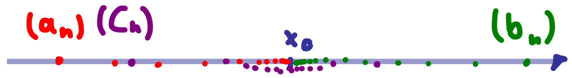
- Jedes Polynom ist auch rationale Funktione (z.B. $p_2(x) = c$).
- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (falls definiert) von rationalen Funktionen sind wieder rationale Funktionen.

Potenzfunktion

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^a$, $(a \in \mathbb{R})$ heißt Potenzfunktion.
- f ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.
- Für $a \neq 0$ existiert eine inverse Funktion f^{-1} zu f

Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \log_a(y)$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a mit $g = f^{-1}$.
- Satz: f, g wachsen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $a < 1$



$\lim_{x \to x_0} f(x)$

Ausgangssituation

- Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- Grenzwert von f aufbauend auf Konvergenz von Zahlenfolgen
- Dazu betrachte: Alle Folgen $a^m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)^T \in D$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, also $a^m \to a$ für $m \to \infty$
- Untersuche Grenzwerte $\lim\limits_{a^m \to a} f(a^m)$.

Definition des Grenzwerts einer Funktion

- f heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (die nicht notwendig zu D gehören muss) konvergent gegen $\tilde{f} \in \mathbb{R}$,
- wenn
  1. mindestens eine Folge (a^m) mit $a^m \in D,\ a^m \neq a$ und $a^m \to a$ existiert (d.h. a ist kein „isolierter Punkt")
  2. für alle Folgen (a^m) mit $a^m \in D$ und $a^m \to a^0$ gilt $f(a^m) \to \tilde{f}$.
- $\tilde{f}$ heißt dann Grenzwert von $f(a^m)$.

Schreibweise für alle gegen a konvergierende Folgen (a^m):

$$\lim_{a^m \to a} f(a^m) = \tilde{f} \qquad \text{oder kurz} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \tilde{f}$$

2016WS_HSA_WiMa_Funktionen_16_11_09.R

ste

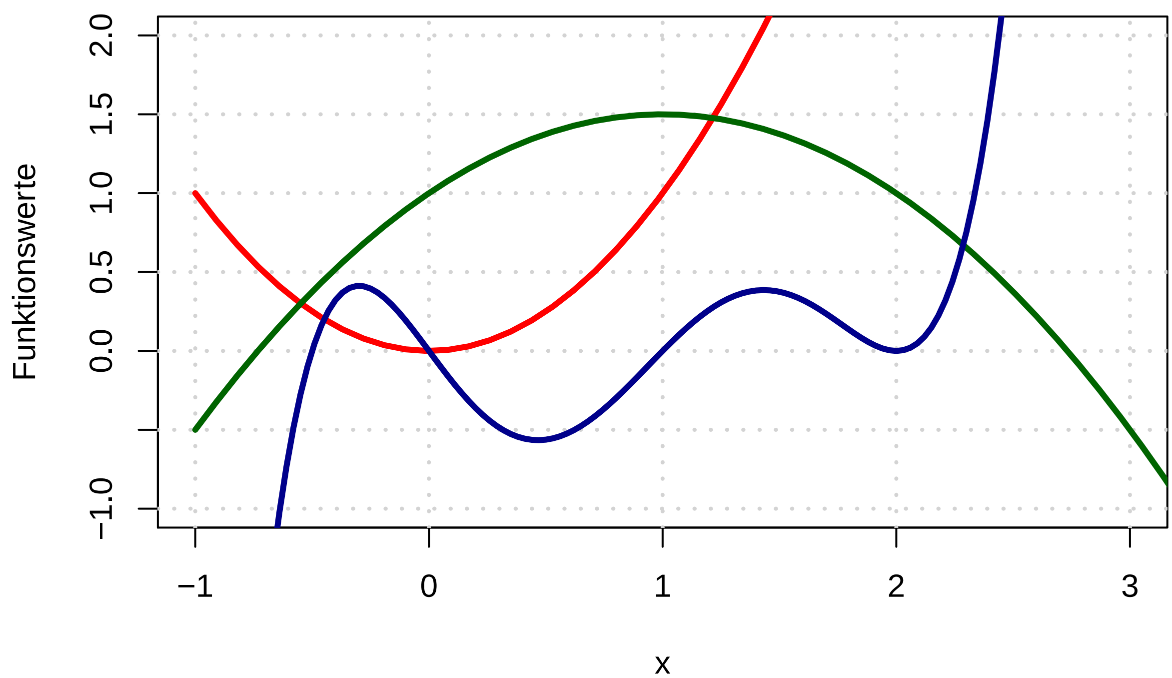
Wed Nov 09 16:02:29 2016

```
# 2.11.2016
# R Skript zur VL WiMa
```

```
# Funktionsgraphen
```

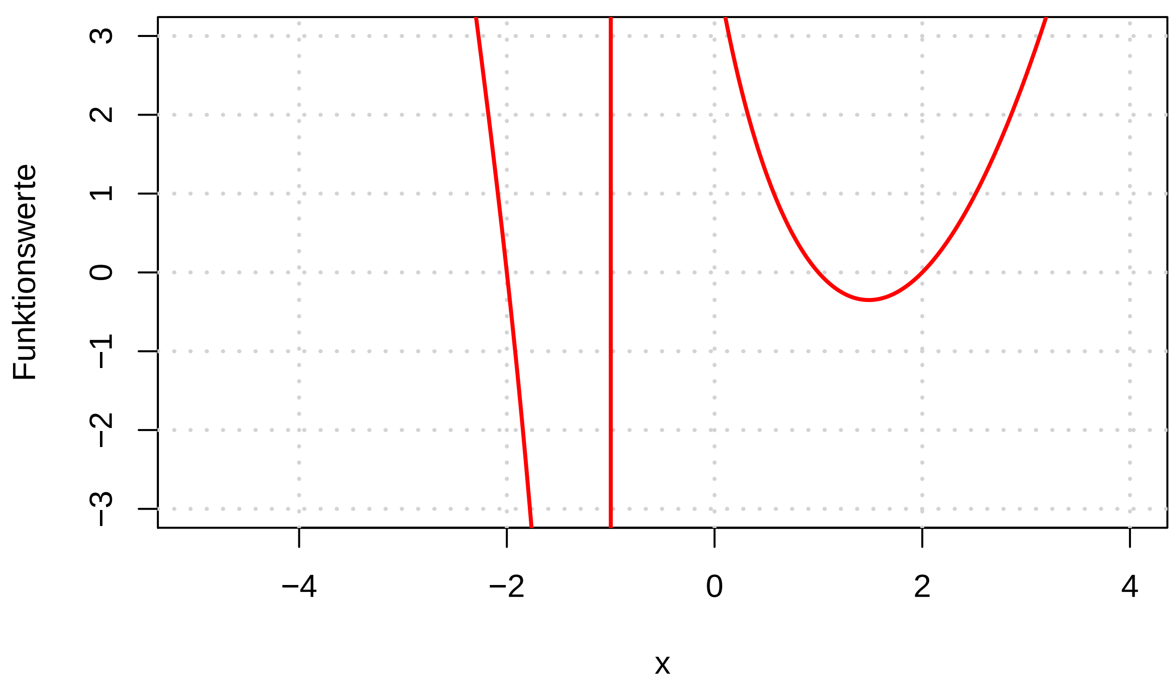
```
# Polynome
```

```
polynom1 = function(x) {x^2}
polynom2 = function(x) {-0.5*x^2 + x + 1}
polynom3 = function(x) {x^5-4.5* x^4 + 5.5* x^3-2* x}

plot(c(-1,3), c(-1,2), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                         # lwd: line width

curve(polynom1, from=-1, to=8, lwd=3, col="red", add=TRUE)
curve(polynom2, from=-1, to=8, lwd=3, col="darkgreen", add=TRUE)
curve(polynom3, from=-1, to=8, lwd=3, col="darkblue", add=TRUE, n=301)
```

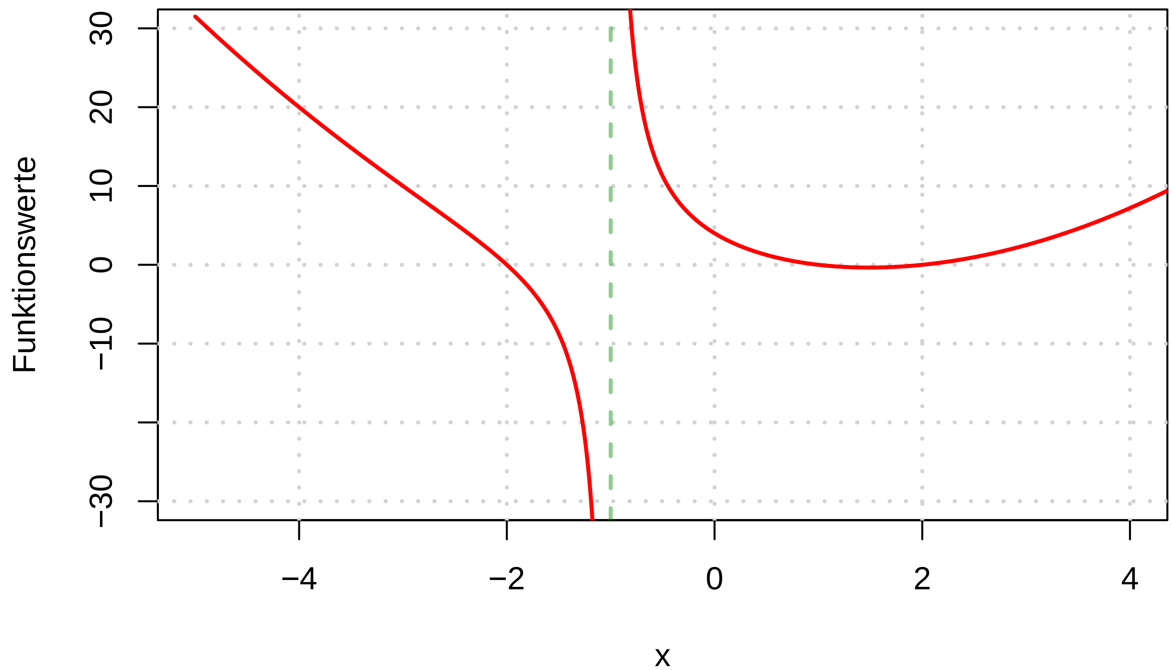


```
# Rationale Funktion
```

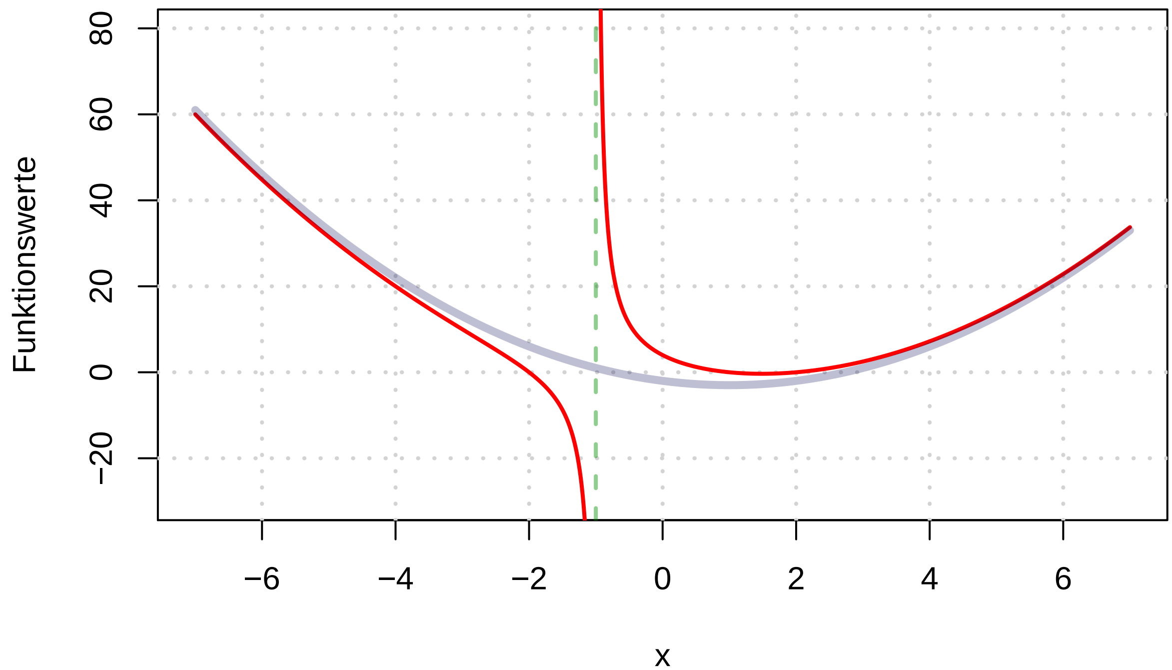
```
Rational1 = function(x) {(x^3-x^2-4* x+4)/(x+1)}
plot(c(-5,4), c(-3,3), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                           # lwd: line width
curve(Rational1, from=-5, to=4, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
```




```
# Pol bei x=-1
plot(c(-5,4), c(-30,30), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                           # lwd: line width
curve(Rational1, from=-5, to=-1, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
curve(Rational1, from=-1, to=5, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
abline(v = -1, lty=2, lwd=2, col="#00900070")
```




```
# Asymptote (Polynom nach Division, ohne Rest)
Asymptote = function(x) {x^2-2*x-2}
plot(c(-7,7), c(-30,80), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                          # lwd: line width
curve(Rational1, from=-7, to=-1, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
curve(Rational1, from=-1, to=7, lwd=2, col="red", add=TRUE, n=1001)
abline(v = -1, lty=2, lwd=2, col="#00900070")
curve(Asymptote, from=-7, to=7, lwd=4, col="#00005040", add=TRUE)
```

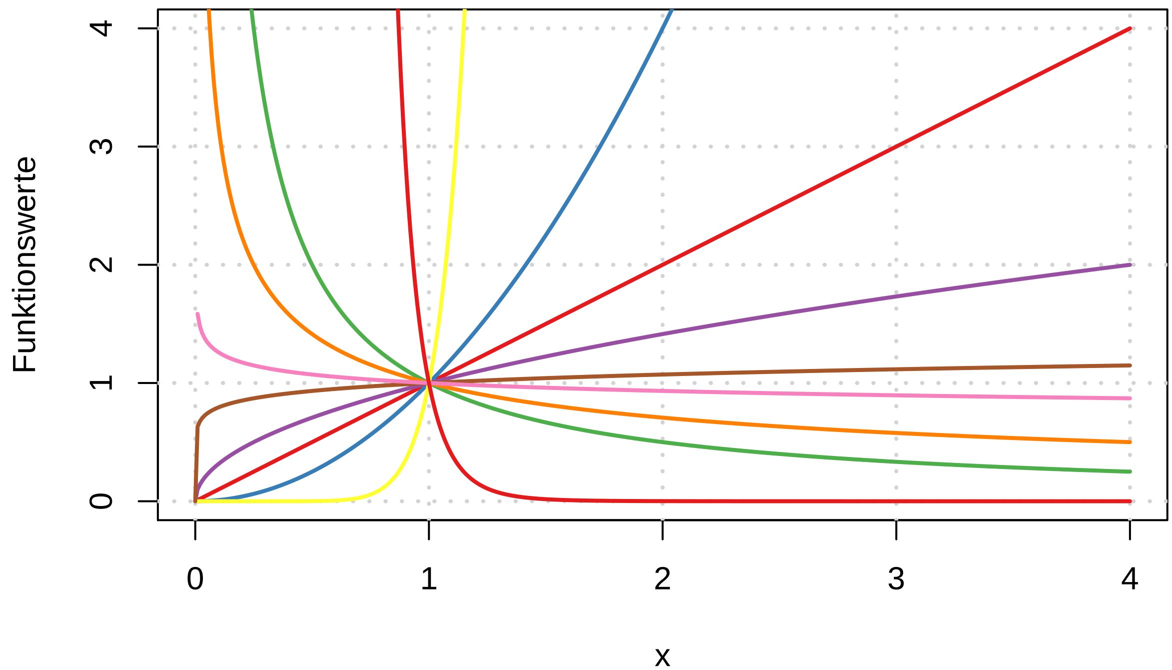



```
# Potenzfunktionen
```

```
PotenzGraph = function(a=1, Farbe="red") {
  curve(x^a, from=0, to=4, lwd=2, col=Farbe, add=TRUE, n=401)
}

plot(c(0,4), c(0,4), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                           # lwd: line width

# RColorBrewer
# install.packages("RColorBrewer")
library(RColorBrewer)
```

```
## Warning: package 'RColorBrewer' was built under R version 3.3.2
```

```
Farben = brewer.pal(9,"Set1")
PotenzGraph(a=1, Farbe=Farben[1])
PotenzGraph(a=2, Farbe=Farben[2])
PotenzGraph(a=-1, Farbe=Farben[3])
PotenzGraph(a=0.5, Farbe=Farben[4])
PotenzGraph(a=-0.5, Farbe=Farben[5])
PotenzGraph(a=10, Farbe=Farben[6])
PotenzGraph(a=0.1, Farbe=Farben[7])
PotenzGraph(a=-0.1, Farbe=Farben[8])
PotenzGraph(a=-10, Farbe=Farben[1])
```




```
# Exponential- und Logarithmusfunktionen
```

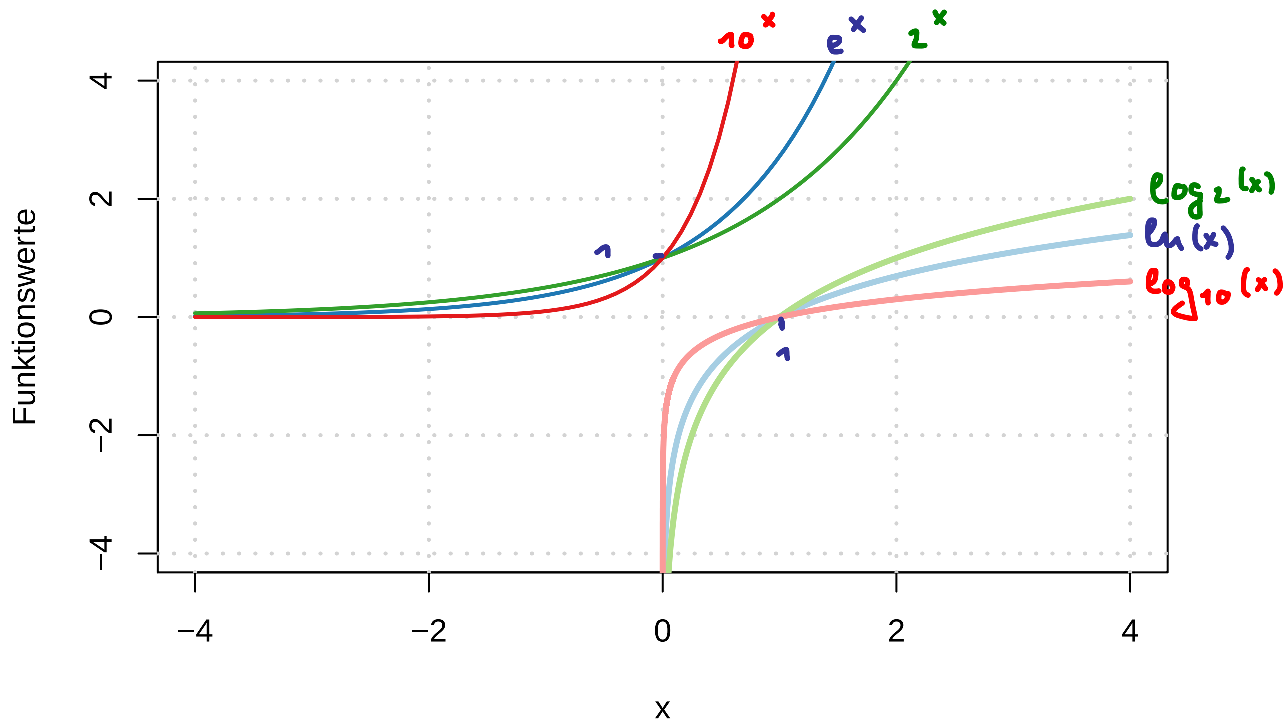
```
plot(c(-4,4), c(-4,4), type="n",
     xlab="x", ylab="Funktionswerte") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                            # lwd: line width

Farben = brewer.pal(9,"Paired")
```

ln x

```
# Logarithmus naturalis und e-Funktion
curve(log(x), from=0, to=4, lwd=3, col=Farben[1], add=TRUE, n=301)
curve(exp(x), from=-4, to=4, lwd=2, col=Farben[2], add=TRUE)
```

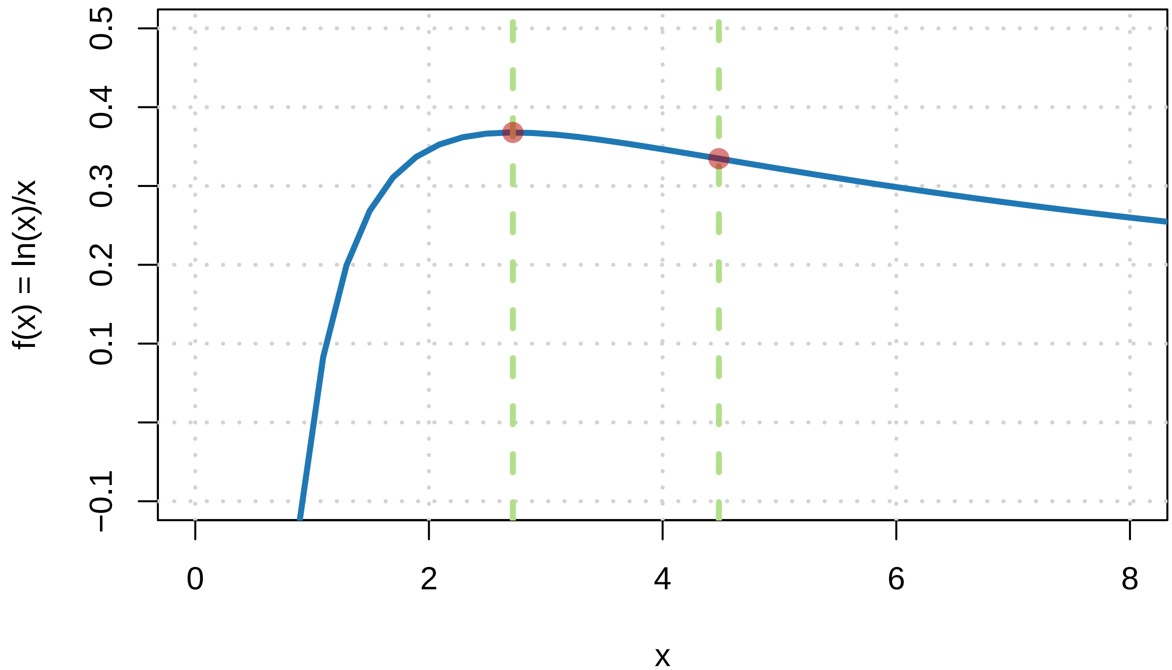
e^x

```
# Basis 2
curve(log(x)/log(2), from=0, to=4, lwd=3, col=Farben[3], add=TRUE, n=301)
curve(2^x, from=-4, to=4, lwd=2, col=Farben[4], add=TRUE)

# Basis 10
curve(log(x)/log(10), from=0, to=0.1, lwd=3, col=Farben[5], add=TRUE, n=3001)
curve(log(x)/log(10), from=0.1, to=4, lwd=3, col=Farben[5], add=TRUE, n=301)
curve(10^x, from=-4, to=4, lwd=2, col=Farben[6], add=TRUE)
```




```
# Beispiel Montonie/Konvexität
```

```
f = function(x) {log(x)/x}
plot(c(0,8), c(-0.1,0.5), type="n",
     xlab="x", ylab="f(x) = ln(x)/x") # leeres Koordinatensystem
grid(lwd=2)                            # lwd: line width
curve(f, from=0.1, to=20, lwd=3, col=Farben[2], add=TRUE)
x = c(exp(1), exp(3/2))
abline(v = x, lty=2, lwd=3, col=Farben[3])
points(x, f(x), pch=20, col="#bb000080", cex=2)
```



0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.1
f(x) = ln(x)/x
0
2
4
6
8
x

Begriff der Stetigkeit

Gegeben

- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

- f heißt stetig in x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f heißt stetig in $T \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ f ist für alle $x \in T$ stetig
- Ist f für ein $\tilde{x} \in D$ nicht stetig, so heißt $\tilde{x}$ Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle

Satz

- Für stetige Funktionen f, g gilt:
  - $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g(x) \neq 0)$ sind stetig
  - $|f|$, $f \circ g$, sind stetig
  - Falls f auf einem Intervall definiert und invertierbar: f^{-1} stetig
- Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig

Beispiel Stetigkeit

geg.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 1 \\ 2x & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

(+, −, ·, :, „o")

Satz: Jede Komposition elementarer Funktionen (Polynome, rationale F., Potenzf., Log. f.) sind im Def. bereich stetig

d.h. hier: f ist stetig für $x \neq 1, 3$ (siehe Satz)

$x = 1$: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 2$

Annäherung von links (bzw. von unten)

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = 2 = f(1)$$

„von rechts"

$\Rightarrow f$ ist stetig bei $x = 1$

$x = 3$: $\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = 2 \cdot 3 = 6$

nicht gleich

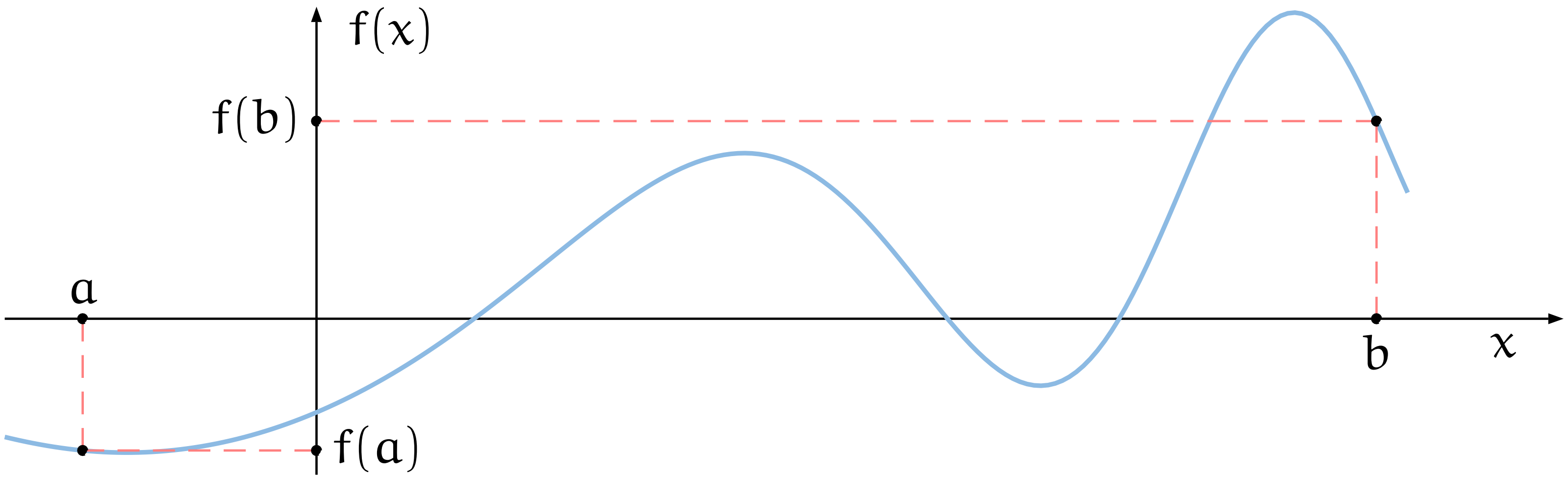
$\lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig für $x = 3$

Zwischenwertsatz

- Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- Dann gilt:

$$f(a) < f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall\, y \in [f(a), f(b)]\ \exists\, x \in [a, b] \quad \text{mit } f(x) = y$$



Gliederung

6 Differentialrechnung

- Differentialquotient und Ableitung
- Änderungsrate und Elastizität
- Kurvendiskussion

Warum Differentialrechnung?

Anwendungen

- Analyse und ökonomische Interpretation wirtschaftswissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten durch Untersuchung der Charakteristika von Funktionen
- Ermittlung von optimalen Lösungen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme wie zum Beispiel Absatzmengenplanung, Loßgrößenplanung etc.

Wesentliche Lernziele

- Verständnis des Differentialquotienten
- Fähigkeit, eine Funktion zu differenzieren
- Bestimmung und Interpretation von Änderungsraten und Elastizitäten
- Durchführung und Interpretation von Kurvendiskussionen

Bekannt sind folgende Zusammenhänge:

- $p(x) = c_1 - c_2 x$ (Preis-Absatz-Funktion)
- $K(x) = c_3 + c_4 x$ (Kostenfunktion)
- (mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ Konstanten)

Damit ergibt sich:

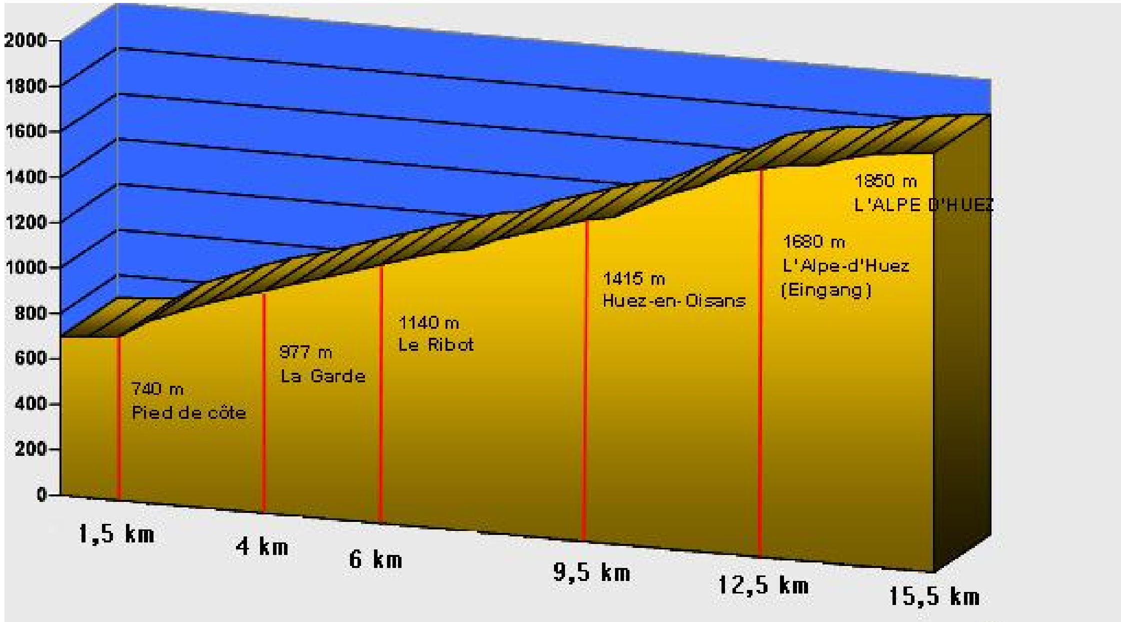
- Umsatzfunktion: $U(x) = c_1 x - c_2 x^2$
- Gewinnfunktion: $G(x) = U(x) - K(x) = c_1 x - c_2 x^2 - (c_3 + c_4 x)$

Fragen:

- Welche Menge/Welcher Preis ist Umsatz-/Gewinnmaximal?
- Welche Veränderung des Umsatzes ergibt sich bei einer Veränderung der Absatzmenge?

Differenzenquotient: Idee

- Tour de France: Anstieg nach L'Alpe d'Huez
- Länge des Anstiegs: 13,9 km
- Auf einer Höhe von 740 m beginnen die 21 Kehren
- Zielankunft liegt auf 1850 m
- Bestimmung von Steigungen: $\dfrac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Distanz}}$



Differenzenquotient

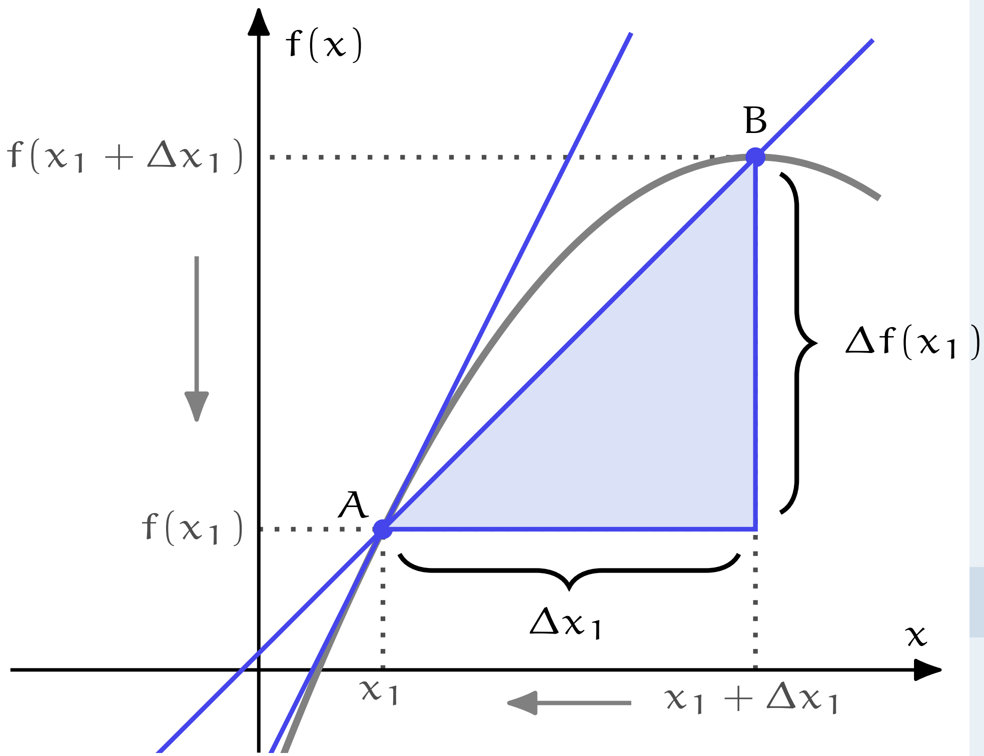
- Gegeben: Reelle Funktion
  $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$
- Dann heißt der Ausdruck

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Differenzenquotient (Steigung) von f im Intervall $[x_1, x_2] \subseteq D$

- Alternative Schreibweise, dabei Ersetzen von x_2 durch $x_1 + \Delta x_1$:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$



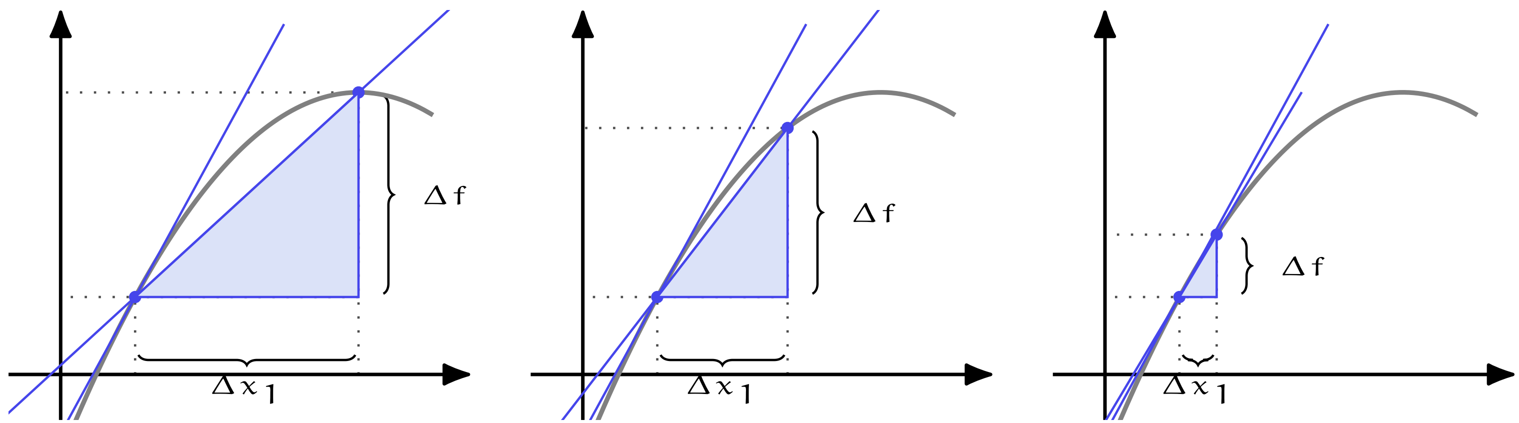
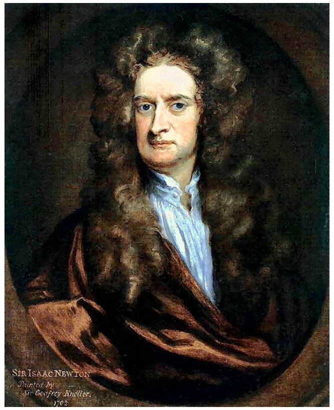


Abbildung: Differentialquotient einer reellen Funktion

Differentialquotient


G. W. Leibniz
(1646-1716)


I. Newton
(1643-1727)

- Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_1 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

existiert.

- Ist f an der Stelle x_1 differenzierbar, heißt

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = &\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = &\frac{df}{dx_1}(x_1) = f'(x_1) \end{aligned}$$

Differentialquotient oder erste Ableitung von f an der Stelle x_1.

- f heißt in D differenzierbar, wenn f für alle $x \in D$ differenzierbar ist.

Ableitungsregeln

- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (soweit definiert) von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar.
- Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[x^5 + \ln x]' = [x^5]' + [\ln x]'$$
$$= 5x^4 + \frac{1}{x}$$

- Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(\underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{x^{-1}}_{g})' = \frac{1}{x} \cdot x^{-1} + \ln(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

- Daraus ergibt sich für eine Konstante c: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- Quotientenregel:

NAZ − ZAN

$$\left(\frac{z}{n}\right)'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$\to x' = 1 \cdot x^0 = 1$

- Kettenregel:

nachdifferenziere (nicht vergessen!)

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$[\ln(x^3 + \tfrac{1}{x})]' = \frac{1}{\quad} \cdot (\quad)' = \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x}} \cdot (3x^2 - x^{-2})$$

Ableitung elementarer Funktionen

Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
x^b	bx^{b-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$