Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Grundlagentest
Ungleichungen!

Testfrage: Ungleichungen 1

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{2}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$ beträgt

Testfrage: Ungleichungen 1

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{2}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$ beträgt

A $(-\infty; -1) \cup (1; 3]$

B $(-1; 1)$

C $\{-3, -1, 1\}$

D $(-\infty; -3] \cup (-1; 1)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Testfrage: Ungleichungen 1

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{2}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}$ beträgt

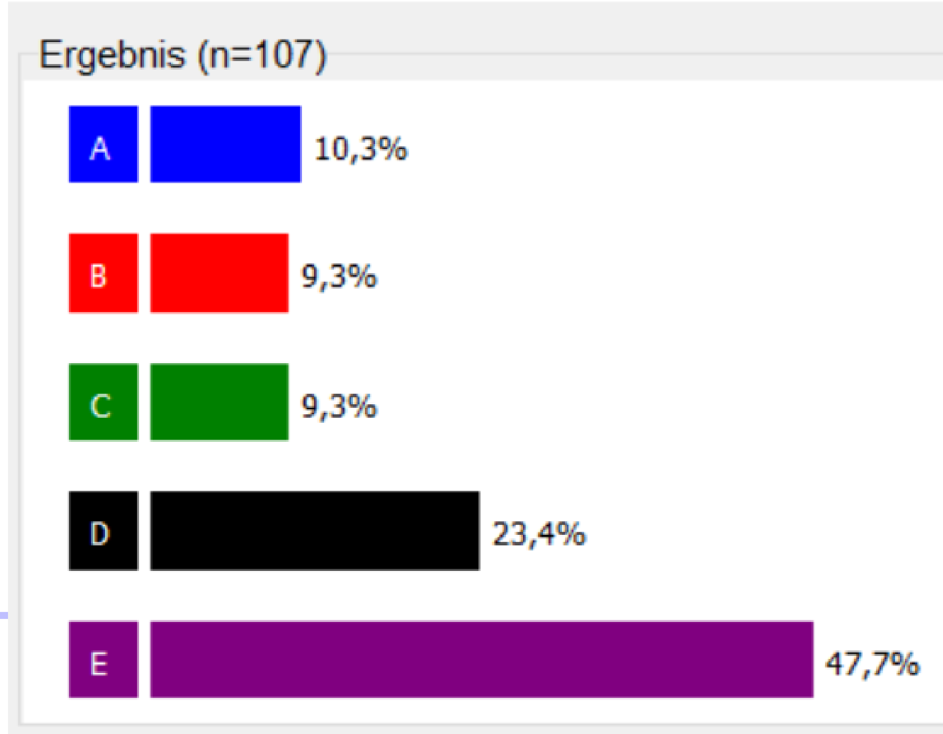
A $(-\infty; -1) \cup (1; 3]$

B $(-1; 1)$

C $\{-3, -1, 1\}$

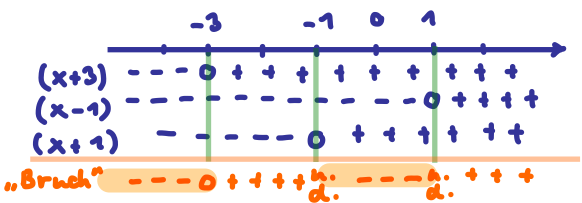
D $(-\infty; -3] \cup (-1; 1)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: D, denn

$$\frac{2(x+1) - 1(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow L = (-\infty; -3] \cup (-1; 1)$$



Testfrage: Ungleichungen 2

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{e^t - 1}{e^t - 2} \geqslant 0$ beträgt

Testfrage: Ungleichungen 2

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{e^t - 1}{e^t - 2} \geqslant 0$ beträgt

---

A $(-\infty; \infty)$

B $(-\infty; 0] \cup (\ln 2; \infty)$

C $(0; \ln 2)$

D $(-\infty; \ln 2)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Testfrage: Ungleichungen 2

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{e^t - 1}{e^t - 2} \geqslant 0$ beträgt

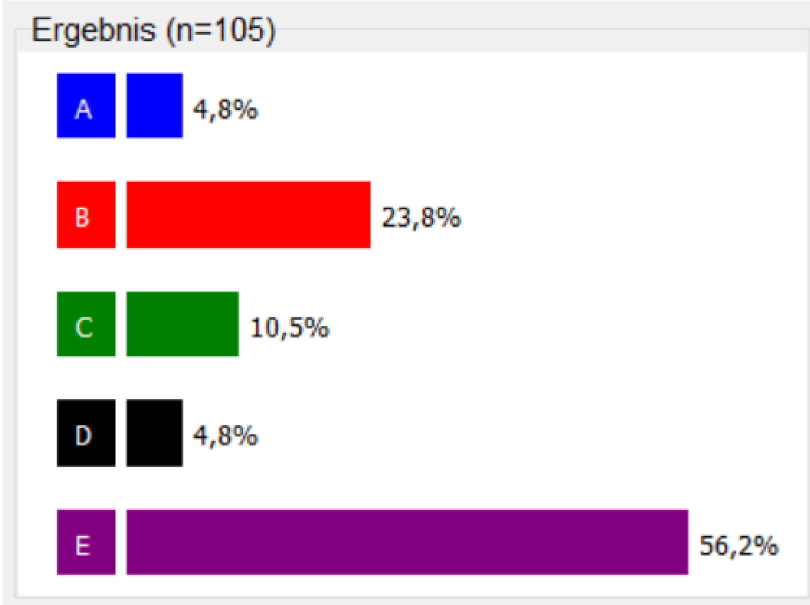
A $(-\infty; \infty)$

B $(-\infty; 0] \cup (\ln 2; \infty)$

C $(0; \ln 2)$

D $(-\infty; \ln 2)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: B, denn

$$\begin{aligned}
\tfrac{e^t-1}{e^t-2} \geqslant 0 &\Leftrightarrow \text{Zähler und Nenner} \geqslant 0 \quad \text{oder} \quad \text{Z. und N.} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow t \leqslant 0 \text{ und } t < \ln 2 \quad \text{oder} \quad t \geqslant 0 \text{ und } t > \ln 2 \\
&\Leftrightarrow t \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad t > \ln 2
\end{aligned}$$

Testfrage: Ungleichungen 3

Die Lösungsmenge der Ungleichung $-y^4 - y^2 - 1 \leqslant 0$ ist

Testfrage: Ungleichungen 3

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\underbrace{-y^4}_{\leq 0} \underbrace{-y^2}_{\leq 0} - 1 \leqslant 0$ ist

A $\{\}$ (leere Menge)

B $(-\infty; \infty)$

C $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2};\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

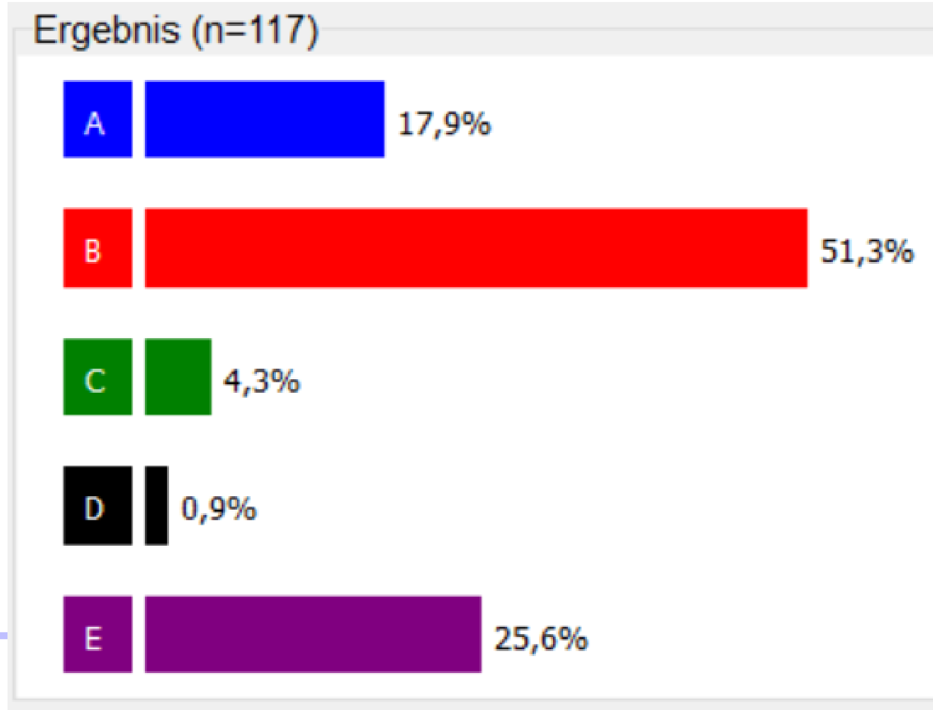
D $(-\infty;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2};\ \infty)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Testfrage: Ungleichungen 3

Die Lösungsmenge der Ungleichung $-y^4 - y^2 - 1 \leqslant 0$ ist

- A $\{\}$ (leere Menge)
- B $(-\infty; \infty)$
- C $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2};\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$
- D $(-\infty;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2};\ \infty)$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: B (alle Summanden sind negativ)

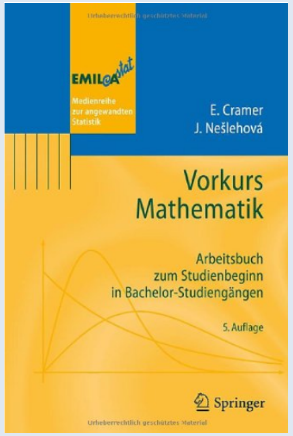
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten korrekt: Alles richtig ungleich!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 8.1 und 8.2 aus dem ersten Buch!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 8.1-8.4 aus dem ersten Buch!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 8.1-8.6 aus dem ersten Buch sowie die Aufgabe 23 aus dem zweiten Buch!

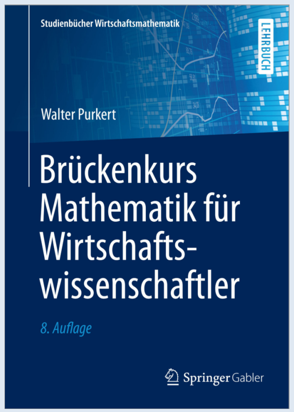
Übungsmaterial

Aufgaben 8.1-8.6 aus



http://goo.gl/qHwN7X

S. 61: Aufgabe 23 aus



http://goo.gl/2D1oYo

Ableitungen höherer Ordnung

- Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$
- Wenn der Differentialquotient $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar ist, dann heißt

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = f''(x)$$

  zweite Ableitung oder Differentialquotient zweiter Ordnung von f in $x \in D$.
- Analog für $n = 2, 3, \ldots$:

$$\frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)} f(x)}{(dx)^{(n-1)}}\right) = f^{(n)}(x)$$

  $f^{(n)}(x)$ bezeichnet dabei die n-te Ableitung von f in $x \in D$.
- f heißt n-mal stetig differenzierbar in D, wenn f in D stetig und in jedem Punkt $x \in D$ n-mal differenzierbar ist

Definition Elastizität

- Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- Dann heißt

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Änderungsrate von f

- und

$$\epsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \rho_f(x) \cdot x$$

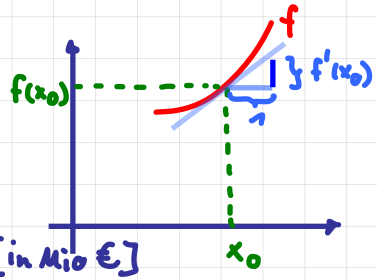
Elastizität von f.

Änderungsrate und Elastizität

geg: $D_f \subset \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$ diff.bar auf D_f

Änderungsrate: $\boxed{\varrho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$

kleines rho



Beispiel: geg.: Umsatz U in Abh. vom Werbebudget w [in Mio €]

$U(10) = 2$ Mrd €
$U'(10) = 100$ Mio €

$U'(10)$: d.h. Bei Erhöhung des Werbebudgets von 10 um 1 Mio € erhöht sich der Umsatz (marginal) um 100 Mio €

$$\varrho_U(10) = \frac{U'(10)}{U(10)} = \frac{100 \text{ Mio €}}{2000 \text{ Mio €}} = 0.05$$

d.h. Bei Erhöhung des W.B. von 10 Mio € um 1 Mio € erhöht sich der Umsatz (marginal) um 5 %.

Elastizität: $\boxed{\varepsilon_f(x) = \varrho_f(x) \cdot x} = \frac{f'(x)}{f(x)/x}$

Beispiel: $\varepsilon_U(10) = \varrho_U(10) \cdot 10 = 0.05 \cdot 10 = 0.5$

d.h. bei Erhöhung des Werbeb. von 10 Mio € (marginal) um 1 % erhöht sich der Umsatz um 0.5 %

$|\varepsilon_f(x)| < 1 \iff f(x)$ ist unelastisch

$|\varepsilon_f(x)| > 1 \iff f(x)$ ist elastisch

Beispiel: $f(x) = a e^{bx}$, $a, b \neq 0$

$f'(x) = a \cdot e^{bx} \cdot b = abe^{bx}$

$\Rightarrow \varrho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cancel{a}b\cancel{e^{bx}}}{\cancel{a}\cancel{e^{bx}}} = b$

$\Rightarrow \varepsilon_f(x) = \varrho_f(x) \cdot x = b \cdot x$

$|bx| > 1$ (für $x > 0$)

$\iff x > \frac{1}{|b|} \iff f$ ist elastisch

Definition

- Für $|\epsilon_f(x)| > 1$ reagiert die relative Änderung von $f(x)$ überproportional auf relative Änderungen von x, die Funktion f heißt im Punkt x elastisch.
- Für $|\epsilon_f(x)| < 1$ bezeichnen wir die Funktion f im Punkt x als unelastisch.

Beispiel

- $f(x) = ae^{bx}$ mit $a, b \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{abe^{bx}}{ae^{bx}} = b \quad \text{und} \quad \epsilon_f(x) = x \cdot \rho_f(x) = bx$$

- Die Änderungsrate der Exponentialfunktion ist also konstant
- Die Elastizität wächst linear mit x.

Steigung und erste Ableitung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und differenzierbar auf (a, b).

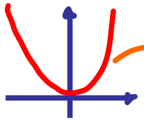
Dann gilt:

- f monoton wachsend in $[a, b] \;\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f monoton fallend in $[a, b] \;\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konstant in $[a, b] \;\Leftrightarrow f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \;\Rightarrow f$ streng monoton wachsend in $[a, b]$
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \;\Rightarrow f$ streng monoton fallend in $[a, b]$

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und **zweimal** differenzierbar auf (a, b).

$f(x) = x^2$
$f''(x) = 2$



streng konvex

Dann gilt:

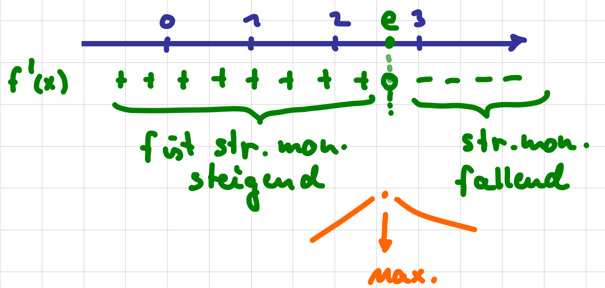
- f konvex in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konkav in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f beschreibt eine Gerade in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng konvex in $[a, b]$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng konkav in $[a, b]$

Beispiel: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, $D_f = (0;\infty)$

$$f'(x) = \left[\ln(x)\cdot x^{-1}\right]' = \frac{1}{x}\cdot x^{-1} + \ln(x)\cdot(-1)\cdot x^{-2}$$
$$= \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

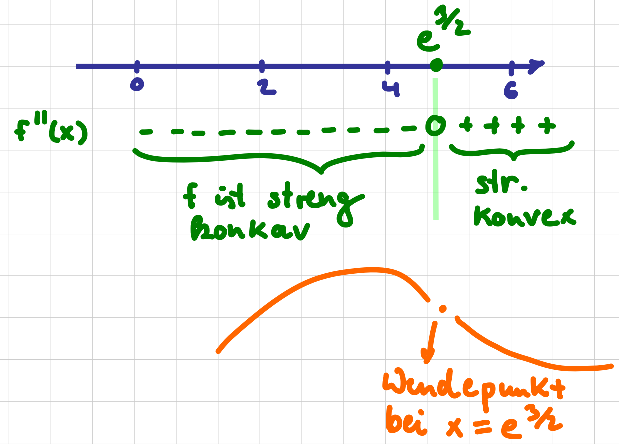
ges.: Monotonie-, Krümmungsverhalten, potentielle Extrema sowie Wendepunkte

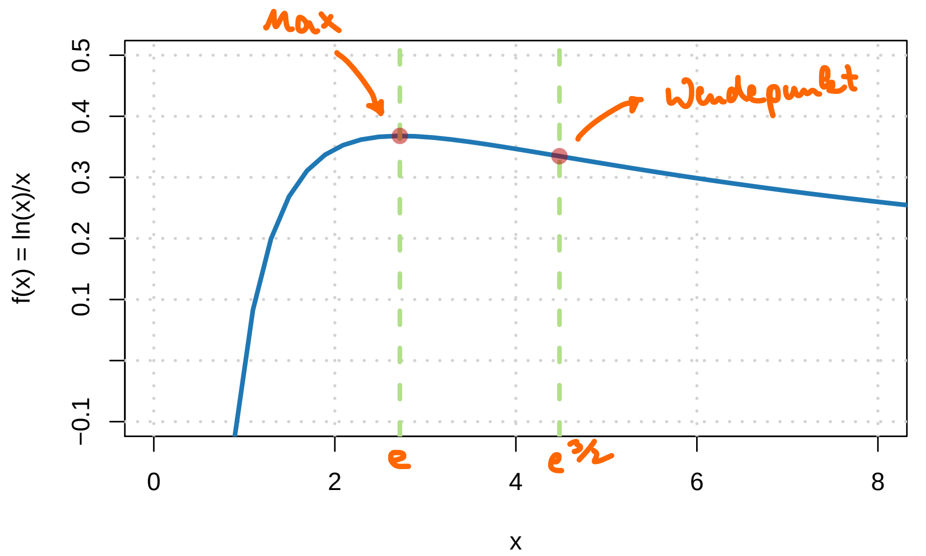
Monotonie: $f'(x) \overset{<}{>} 0 \iff 1-\ln(x) \overset{<}{>} 0$
$\iff 1 \overset{<}{>} \ln(x)$
$\iff e^1 \overset{<}{>} e^{\ln(x)}$
$\iff e \overset{<}{>} x$



Krümmung: $f''(x) = \left[(1-\ln(x))\cdot x^{-2}\right]'$
$$= -\frac{1}{x}\cdot x^{-2} + (1-\ln(x))\cdot(-2)\cdot x^{-3}$$
$$= \frac{-1-2+2\ln(x)}{x^3} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

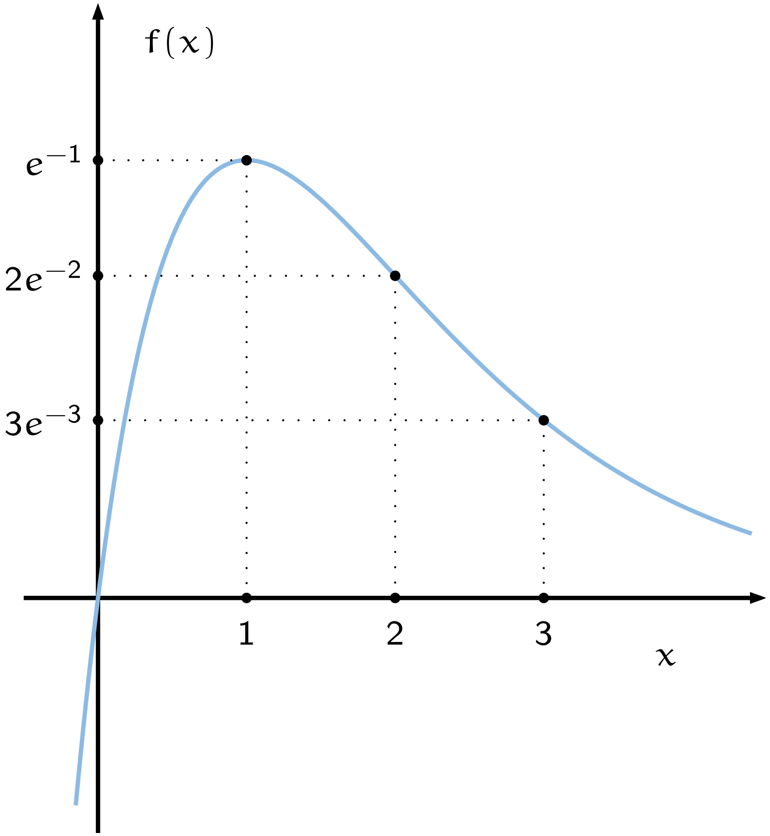
$2\ln(x)-3 \overset{<}{>} 0 \iff \ln(x) \overset{<}{>} \frac{3}{2}$
$\iff e^{\ln(x)} \overset{<}{>} e^{3/2}$
$\iff x \overset{<}{>} e^{3/2} \approx 4.48$





Beispiel

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^{-x}$
- $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$
- Damit: $f'(x) \geqslant 0$ für $x \leqslant 1$ und $f'(x) \leqslant 0$ für $x \geqslant 1$
- $\Rightarrow$ f mon. wachsend für $x \leqslant 1$ und f mon. fallend für $x \geqslant 1$
- $\Rightarrow$ f global maximal bei $x = 1$



- $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$
- $\Rightarrow$ $f''(x) \geqslant 0$ für $x \geqslant 2$ und $f''(x) \leqslant 0$ für $x \leqslant 2$
- $\Rightarrow$ f konvex für $x \geqslant 2$ und f konkav für $x \leqslant 2$

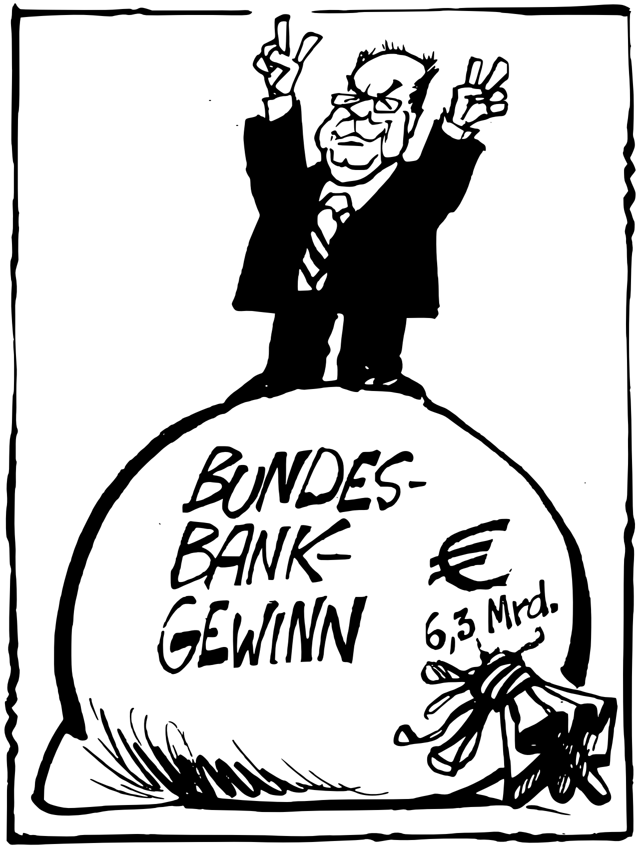
Definition Wendepunkt

- $f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt
- wenn es ein $r > 0$ gibt mit
- f ist in $[x_0 - r, x_0]$ streng konvex und
- f ist in $[x_0, x_0 + r]$ streng konkav und
- (oder umgekehrt)

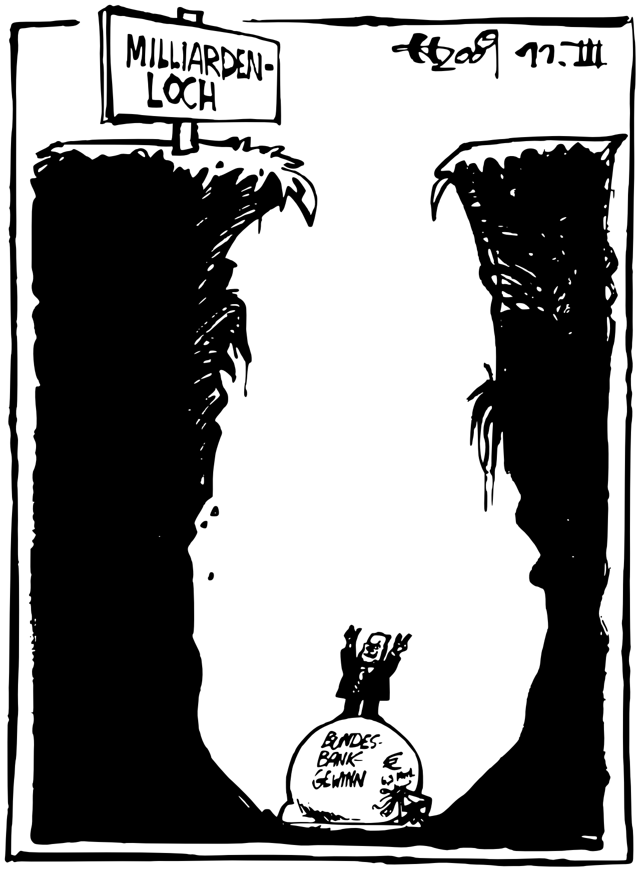
Definition Terrassenpunkt

- x_0 ist Terrassenpunkt
- wenn x_0 Wendepunkt ist
- und $f'(x) = 0$

Lokales versus globales Maximum



Der Finanzminister endlich mal wieder oben auf



(Zeichnung: Haitzinger, 2009)

Voraussetzung

- f zweimal stetig differenzierbar in (a, b)
- und $f'(x_0) = 0$ mit ($x_0 \in (a, b)$)

Dann gilt

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Maximum von f
- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Minimum von f

- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Maximum von f
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Minimum von f