Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Testfrage: Polynome 1

Die Summe der Lösungen der Gleichung

$$x^6 - 2x^5 - 15x^4 = 0$$

$= x^4 \cdot (x^2 - 2x - 15) =$

$x_{1,2,3,4} = 0$ (4-fache Nullstelle)

$x_{5,6} = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4+60}\right)$

$= 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$\sum x_i = 0+0+0+0+5+(-3)$
$= 2$

beträgt:

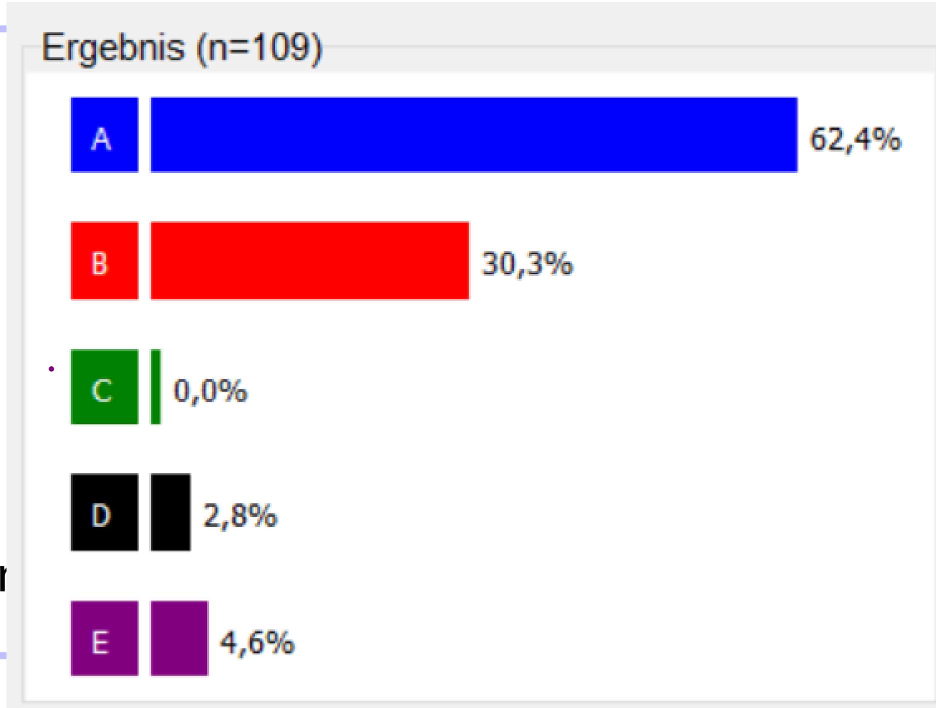
(A) 2

(B) 3

(C) 8

(D) 0

(E) Ich habe kein oder ein anderes Ergebn



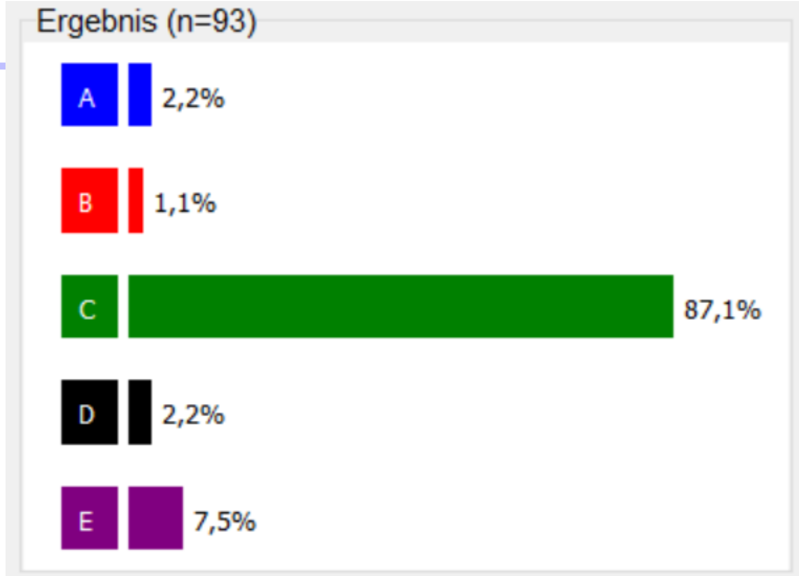
Richtig: (A)

Testfrage: Polynome 2

Die Polynomdivision

$$(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) : (x - 1)$$

ergibt:



- A $x^4 - 3x^2 + 2x - 3$
- B $x^4 - 3x^2 + 2x$
- C $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$
- D $4x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 2$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: C

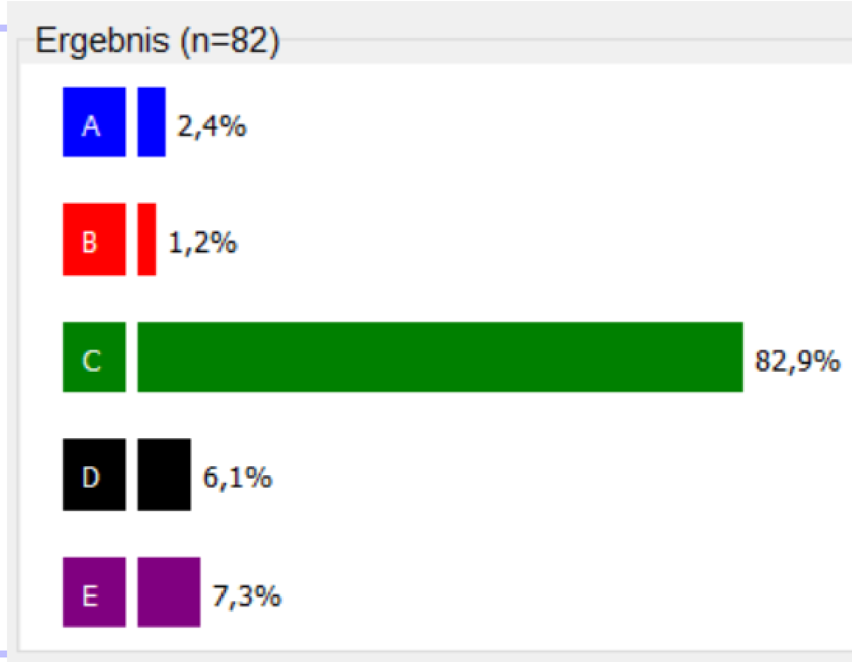
Testfrage: Polynome 3

Eine Nullstelle der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$

ist $x_1 = 3$. Die Summe aller drei Nullstellen ist:

- A -2
- B 8
- C 5
- D 3
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

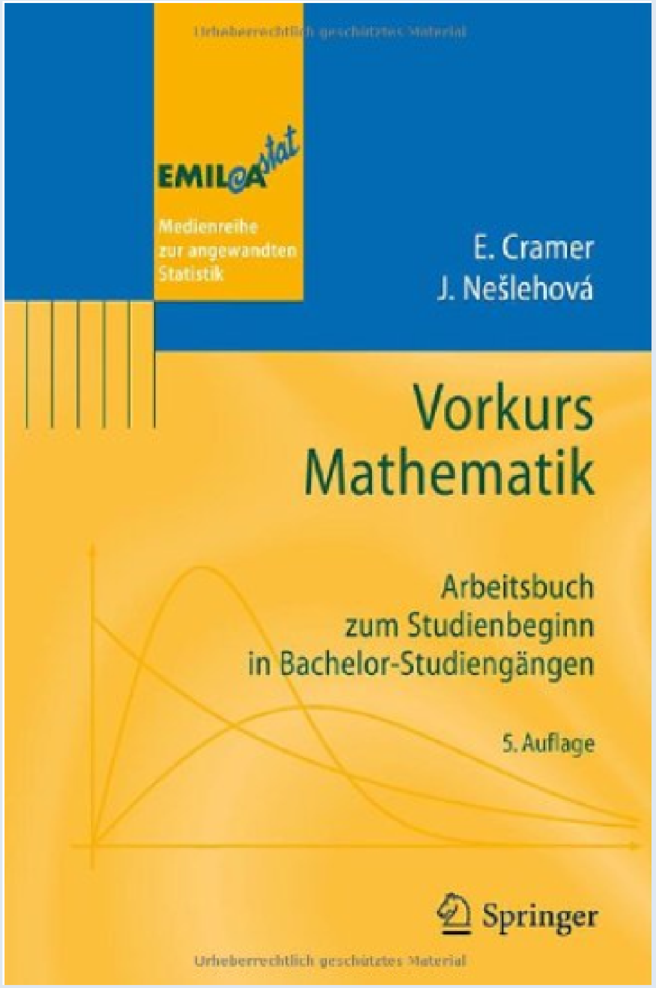


Richtig: C

Testauswertung:

Übungsmaterial

Aufgaben 7.1- 7.7 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Mit Polynomen geht alles klar!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 7.6 und 7.7!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 7.3-7.7!
- Keine Antwort richtig: Sie sollten unbedingt die Aufgaben 7.1-7.7 rechnen!

Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

2 Aussagenlogik

3 Mengen

4 Folgen und Reihen

5 Reelle Funktionen

6 Differentialrechnung

7 Integration

8 Finanzmathematik

9 Lineare Algebra

10 Lineare Programme

7 Integration

- Unbestimmte Integrale
- Bestimmte Integrale
- Uneigentliche Integrale

Unbestimmte Integrale

Geg.: Funktion $f: D \to \mathbb{R}$

gesucht: Funktion $F: D \to \mathbb{R}$

mit $F'(x) = f(x)$

Beispiele

$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} x^2$

$f(x) = x^{1/2} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} x^{1.5}$

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$\vdots$

Alle Funktionen F mit $F' = f$ nennt man **unbestimmtes Integral**.

Schreibweise: $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx}$

F heißt auch **Stammfunktion** von f

Beobachtung: F ist nicht eindeutig, aber bestimmt bis auf eine Konstante

Beispiel: $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$ ($C \in \mathbb{R}$ beliebig)

Wichtige Stammfunktionen

für	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x \geq 0, b \neq -1$	x^b	$\frac{1}{b+1} x^{b+1} + C$
$x \neq 0$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
$a > 0$	a^x	$a^x \cdot \frac{1}{\ln a} + C$

Beispiele: • $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2} dx = \frac{1}{1/2 + 1} \cdot x^{1/2+1} + C$

$= \frac{1}{3/2} x^{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$

Rechenregeln

Summenregel: $\boxed{\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$

Konstante Faktoren: $\boxed{\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx}$ $a \in \mathbb{R}$

[Ableiten: Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$\Rightarrow$ (Integrieren auf beiden Seiten):

$f \cdot g = \int f' \cdot g\,dx + \int f \cdot g'\,dx$]

Partielle Integration $\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx}$

Beispiel: $\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{e^x}\,dx = \underset{f}{e^x} \cdot \underset{g}{x} - \int \underset{f}{e^x} \cdot \underset{g'}{1}\,dx$

$= e^x \cdot x - e^x + C$

$= e^x (x - 1) + C$

[Probe: $[e^x (x-1)]' = e^x (x-1) + e^x \cdot (1-0)$

$= e^x \cdot (x - 1 + 1 - 0)$

$= x \cdot e^x$ ✓]

Beispiel (partielle Integration)

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot \ln(x)\,dx = x\cdot \ln(x) - \int x\cdot \tfrac{1}{x}\,dx$$

$$f'\cdot g \qquad\qquad f\cdot g - \int f\cdot g'\,dx$$

$$= x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C$$

$$= x\cdot(\ln(x) - 1) + C$$

Bemerkung: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

$$\Rightarrow \int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln(a)}\int \ln(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln(a)}\cdot x(\ln(x)-1) + C$$

Substitutionsregel

[Ableiten: Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Stammf. auf beiden Seiten

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx \quad]$$

Beispiel: gesucht: Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$

Substitution von $z = x^2+2$, $z'(x) = 2x$

$$z' = \frac{dz}{dx} \Leftrightarrow z'\cdot dx = dz \Leftrightarrow 2x\cdot dx = dz$$

Setze z ein: $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{z}\,dz$

$$= \ln|z| + C = \ln|x^2+2| + C$$

Beispiel (Substitution)

$$\int \frac{x^2 + 2/3}{\sqrt[3]{x^3+2x}}\,dx$$

Substituiere: $z = x^3 + 2x$, $z' = 3x^2+2$

$$dz = (3x^2+2)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+2x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{z^{1/3}}\cdot dz$$

$$= \frac{1}{3}\int z^{-1/3}\,dz = \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{-1/3+1}\cdot z^{-1/3+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{2/3}\cdot z^{2/3} + C = \frac{1}{2}(x^3+2x)^{2/3} + C$$

Beispiel: $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,dx$

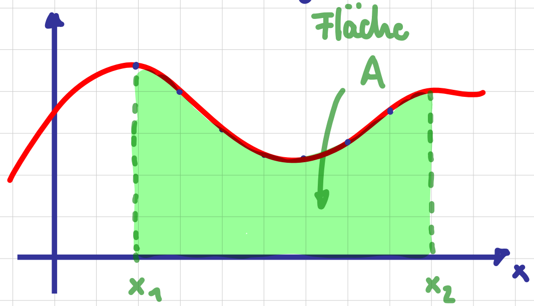
$z = -x^2$, $z' = -2x$, $dz = -2x\,dx$

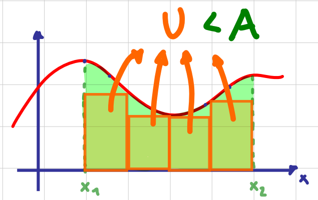
$$-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int e^z\,dz$$

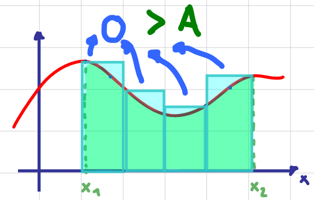
$$= -\frac{1}{2}e^z + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

Bestimmte Integrale

ggf. $f(x) \geq 0$







Hauptsatz der Integralrechnung

$$A = F(x_2) - F(x_1)$$
$$\text{mit } F(x) = \int f(x)\,dx$$

Schreibweise: $(a<b)$

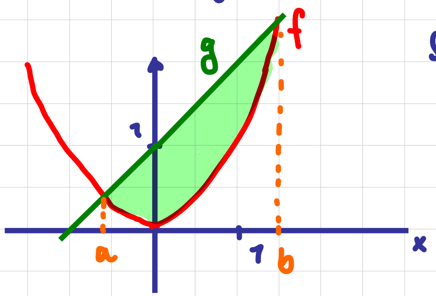
$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

bestimmtes Integral von a bis b über f(x)

Beispiel: gesucht: Fläche, die von den Graphen der Funktionen f, g mit

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x+1$$

eingeschlossen wird.

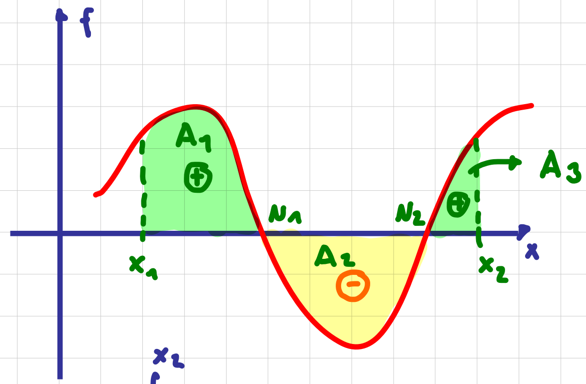


Schnittpunkte:

$$f = g \iff x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\approx \begin{cases} -0.62 & (a) \\ 1.62 & (b) \end{cases}$$

Fläche: $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$

$$= \int_a^b (g-f)\,dx = \int_a^b (x+1-x^2)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_a^b$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}b^2 + b - \tfrac{1}{3}b^3\right) - \left(\tfrac{1}{2}a^2 + a - \tfrac{1}{3}a^3\right) = \ldots$$



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

falls Gesamtfläche gesucht:

$$A = \underbrace{\int_{x_1}^{N_1} |f(x)|\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{N_1}^{N_2} |f(x)|\,dx}_{A_2} + \underbrace{\int_{N_2}^{x_2} |f(x)|\,dx}_{A_3}$$

Einleitung

- Umkehrung der Fragestellung der Differentialrechnung
- Jetzt gesucht:
  Funktion, deren Änderungsverhalten bekannt ist
- Beispiel:
  - Bekannt:
    Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit
  - Gesucht:
    Ort in Abhängigkeit der Zeit

Gliederung

1. Unbestimmte Integrale
2. Riemannsche Summen und bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale

Stammfunktion

- Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt

$$F'(x) = f(x)$$

- Sind $F, \hat{F}$ beliebige Stammfunktionen von f, gilt für alle $x \in D$:

$$\hat{F}(x) - F(x) = \text{konstant}$$

- Also: Hat man eine Stammfunktion F gefunden, gilt für alle anderen Stammfunktionen

$$\hat{F}(x) = F(x) + c$$

- Ist $F: D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: D \to \mathbb{R}$, so heißt

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{R}$$

das unbestimmte Integral der Funktion f.

- Weitere Bezeichnungen:

x : Integrationsvariable
$f(x)$: Integrand
c : Integrationskonstante

- Unbestimmte Integration ist Umkehrung der Differentiation

Einige unbestimmte Integrale

- Sei f eine reelle Funktion und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann gilt:

a) $f(x) = a \ (a \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = ax + c$

b) $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

$f(x) = x^m \ (m = -2, -3, \ldots,\ x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c$

$f(x) = x^r \ (r \in \mathbb{R},\ r \neq -1,\ x > 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$

c) $f(x) = x^{-1} \ (x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \ln|x| + c$

d) $f(x) = \sin x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = -\cos x + c$

$f(x) = \cos x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \sin x + c$

e) $f(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = e^x + c$

$f(x) = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

Summen und konstante Faktoren

- Für die reellen Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ existiere das unbestimmte Integral. Dann gilt:

a) $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

b) $$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

Partielle Integration

- Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Rechenregeln

Substitutionsregel

- Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion F und
- $g: D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, $g(D_1) \subseteq D$ sei stetig differenzierbar.
- Dann existiert die zusammengesetzte Funktion $f \circ g: D_1 \to \mathbb{R}$ mit $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$
- und es gilt mit $y = g(x)$

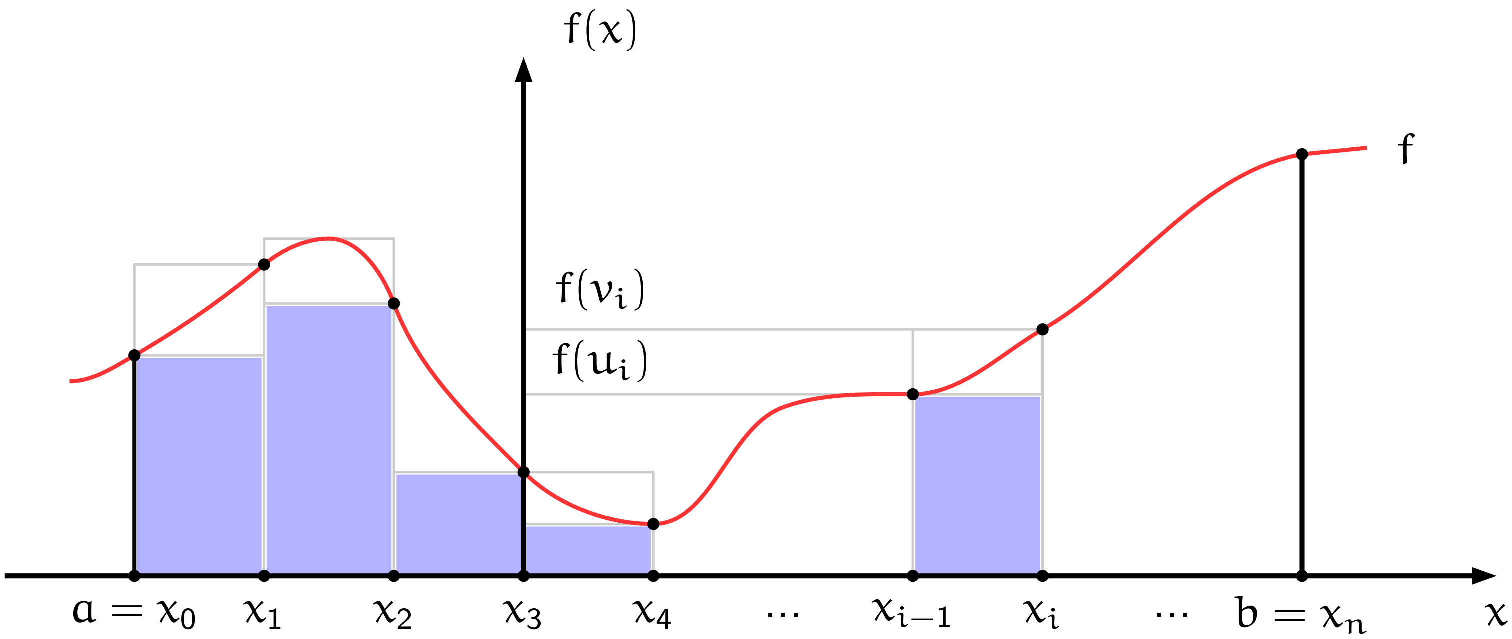
$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)\,dx &= \int f(y)\,dy \\ &= F(y) + c = F(g(x)) + c \\ &= (F \circ g)(x) + c \end{aligned}$$

- mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Riemannsche Summen

- Gegeben: Beschränkte und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \geqslant 0$
- Unterteilen von $[a, b]$ in $[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots\ ,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots\ ,\ [x_{n-1}, b]$
- mit $a = x_0,\ b = x_n$
- In jedem Teilintervall: Wähle Maximum und Minimum:

$$f(u_i) = \min\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und}$$
$$f(v_i) = \max\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,.$$

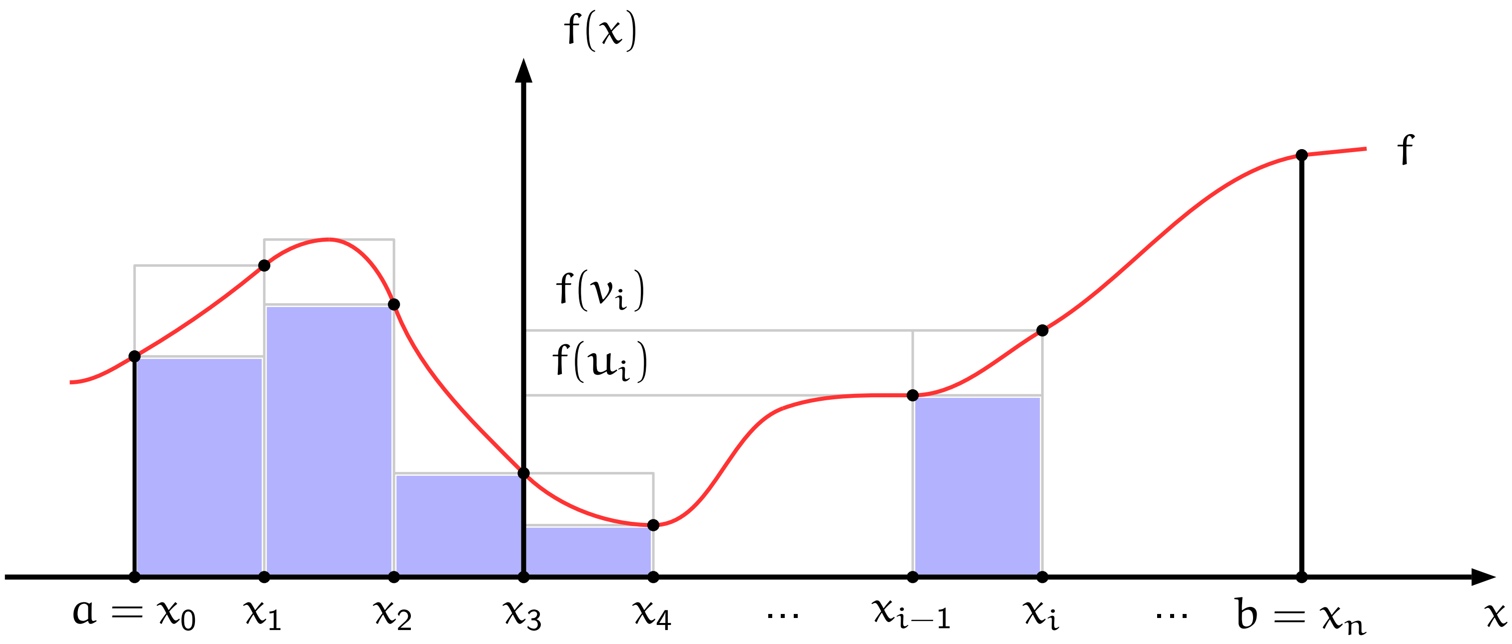


1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
1. Unbestimmte Integrale
2. Bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
10. Lineare Programme

Riemannsche Summen

- Untere und obere Grenze $I^n_{\text{min}} \leqq I \leqq I^n_{\text{max}}$ für Flächeninhalt unter Kurve mit:

$$I^n_{\text{min}} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}), \quad I^n_{\text{max}} = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1})$$



- Untere und obere Grenze $I^n_{\text{min}} \leqq I \leqq I^n_{\text{max}}$ für Flächeninhalt unter Kurve mit:

$$I^n_{\text{min}} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}), \quad I^n_{\text{max}} = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1})$$

- Jetzt: Verfeinerung der Unterteilung von $[a, b] \Rightarrow$ Folgen (I^n_{min}) und (I^n_{max})
- Existieren für $n \to \infty$ die Grenzwerte der beiden Folgen und gilt für den wahren Flächeninhalt I unter der Kurve

$$\lim_{n\to\infty} I^n_{\text{min}} = \lim_{n\to\infty} I^n_{\text{max}} = I$$

- dann heißt f Riemann-integrierbar im Intervall $[a, b]$
- Schreibweise:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx}$$

- Bezeichnungen:

I	Bestimmtes Integral von f im Intervall $[a, b]$
x	Integrationsvariable
$f(x)$	Integrand
a, b	Integrationsrenzen

Existenz von bestimmten Integralen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) f stetig in $[a, b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert

b) f monoton in $[a, b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert

Existenz von bestimmten Integralen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

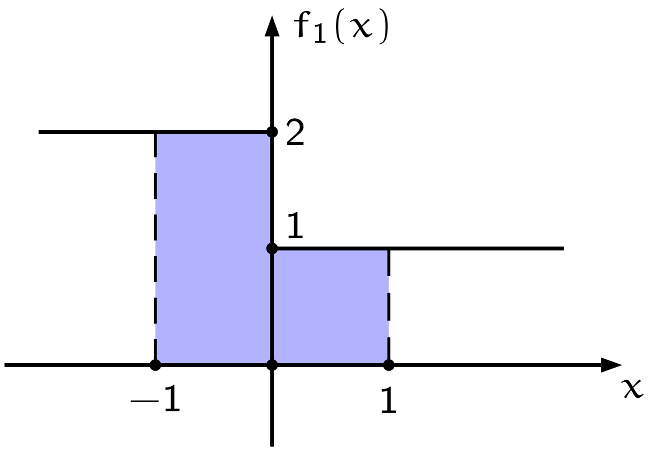
a) f stetig in $[a,b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert

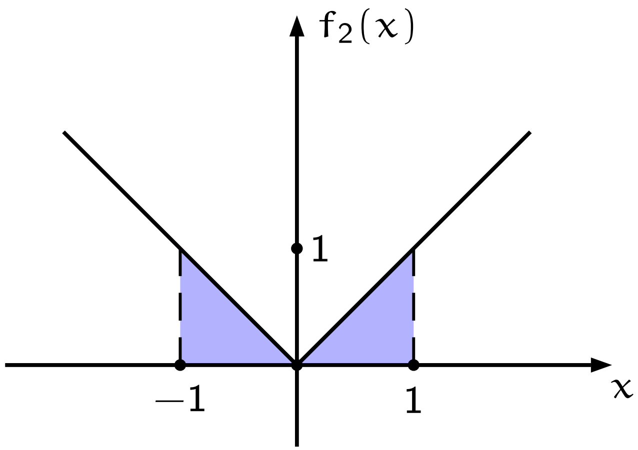
b) f monoton in $[a,b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert

- Beispiele: Gesucht: $\int_{-1}^{+1} f_i(x)\,dx$ für

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$f_2(x) = |x|$$





Sätze zu bestimmten Integralen

- Gegeben: Integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
  Dann gilt:

a) $\boxed{\int_a^b c f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx}$ für alle $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\, dx \leqq \int_a^b g(x)\, dx}$

c) $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx}$ für alle $c \in (a, b)$

- Definiert wird außerdem:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\, dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx}$$

Zusammenhang bestimmtes und unbestimmtes Integral

Zusammenhang

- Gegeben $f: \; D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine in D stetige Funktion.
- Dann existiert eine Stammfunktion F von f mit $\boxed{F'(x) = f(x)}$
- sowie das unbestimmte Integral $\boxed{\int f(x) dx = F(x) + c}$
- und das bestimmte Integral $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$

Unterschiede

- Bestimmtes Integral entspricht einer reellen Zahl
- Unbestimmtes Integral entspricht Schar von Funktionen

a) Für integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt die Additionsregel

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

b) Für stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt die Regel der partiellen Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

c) Ist $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit der Stammfunktion F und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar, so gilt die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,.$$

Grenzen bei $\pm\infty$

- Die reelle Funktion f sei für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und integrierbar.
- Dann heißt der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, falls er existiert, das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $[a, \infty)$, und man schreibt

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

- Andernfalls spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral.
- Entsprechend definiert man das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $(-\infty, b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

- Sind beide Integrale $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ und $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent, so existiert auch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Beliebige Grenzen

- Geg.: Reelle Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in [a, b - \epsilon]$ mit $\epsilon \in (0, b - a)$ integrierbar. Dann heißt Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx$ (falls er existiert)
  konvergentes uneigentliches Integral von f im Intervall $[a, b]$. Schreibweise:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

- Andernfalls: Divergentes uneigentliches Integral
- Analog für alle $x \in [a + \epsilon, b]$ mit $\epsilon \in (0, b - a)$, konvergentes uneigentliches Integral von f in $[a, b]$, mit

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

- Ist f in (a, b) definiert und sind für $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\, dx$ und $\int_c^b f(x)\, dx$ konvergent, dann ist auch folgendes Integral konvergent:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$