Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Finanzmathematik

Zins $\hat{=}$ Gebühr für überlassenes Geld, abhängig von Summe, der Dauer und vom vereinbarten Zinssatz

K_0 : Betrag zu Beginn
K_n : Betrag nach n Zinsperioden
i : Zinssatz (z.B. bei $5\% = 0.05$
$1.2\% = 0.012$
$-3\% = -0.03$)
q : Zinsfaktor ($\hat{=}\ 1+i$, z.B. $5\% \hat{=} 1.05$
$1.2\% \hat{=} 1.012$
$-3\% \hat{=} 0.97$)

Einfache (lineare) Verzinsung

n : Anzahl Zinsperioden

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

per annum $\hat{=}$ pro Jahr

Beispiel: Verzugszinssatz $i = 0.05$ (p.a.)
$K_0 = 1$ Mio €, $n = 3$ (Jahre)

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = 1\text{Mio} + 1\text{Mio} \cdot 3 \cdot 0.05$$
$$= 1\text{Mio} + \underbrace{150\,000}_{\text{Zinsen}} = 1\,150\,000\ €$$

Exponentielle Verzinsung (Zinseszinsen)

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

Beispiel: Kontostand Girokonto: $K_0 = -1000$ €
$i = 0.19$ (Annahme: jährliche Abrechnung)
$n = 5$

$$K_n = -1000 \cdot 1.19^5 = -2386.36$$

Jetzt: $K_n = -1$ Mio €, gesucht: Laufzeit n

$$K_n = K_0 \cdot q^n \Leftrightarrow q^n = \frac{K_n}{K_0}$$
$$\Leftrightarrow n = \log_q\left(\frac{K_n}{K_0}\right) \left(= \frac{\ln(K_n/K_0)}{\ln q}\right)$$
$$= \log_{1.19}\left(\frac{1\text{ Mio}}{1000}\right) = \log_{1.19}(1000)$$
$$\approx 39.71 \text{ Jahre}$$

Gemischte Verzinsung (30-360-Tage-Methode)

Regeln:
- Jeder Monat hat 30 Tage
- Der Einzahlungstag wird komplett verzinst, der Auszahlungstag gar nicht

Beispiel: Einzahlung von 10 000 € am 1.4.2016 auf Konto ($i = 0.08$ p.a.), Abheben am 30.11.2016

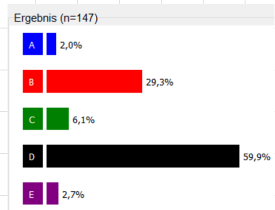
gesucht: Zinsen

Δt : Zinstage

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t}{360}\right)$$
$$= 10\,000 \cdot \left(1 + 0.08 \cdot \frac{239}{360}\right) = \underbrace{10\,531{,}11}_{\text{Zinsen } 531{,}11}$$

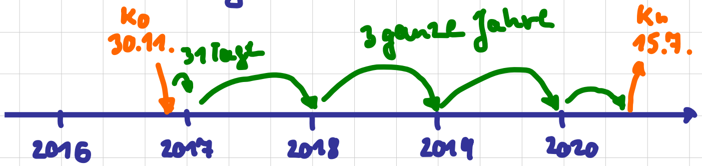
Beispiel: Einzahlung 1 Mrd € am 28.2.2017 (23.59)
Abheben am 1.3.2017 (0.01)
(Zinssatz: 1% p.a.)

Anzahl Zinstage?
A: 0, B: 1, C: 2, D: 3, E: 4



$$K_n = 1\,\text{Mrd}\left(1+0.01\cdot\frac{3}{360}\right) = 1.000.083.333,33 \text{ €}$$

Beispiel: Einzahlung: am 30.11.2016, 5000 € $(i=0.015)$
Auszahlung: am 15.7.2020 inkl. Zinsen



$$K_n = 5000\cdot\underbrace{\left(1+0.015\cdot\frac{31}{360}\right)}_{\text{Verzinsung für 2016}}\cdot\underbrace{1.015^3}_{\text{Zinses-zinsen für 2017,18,19}}\cdot\underbrace{\left(1+0.015\cdot\frac{194}{360}\right)}_{\text{Verz. für 2020}}$$

$= 5277,46$ €

Allgemein:
$$K_n = K_0\cdot\left(1+i\cdot\frac{\Delta t_E}{360}\right)\cdot q^n\cdot\left(1+i\cdot\frac{\Delta t_A}{360}\right)$$

Δt_E : Zinstage im Einzahlungsjahr
Δt_A : " Auszahlungsjahr
n : ganze Jahre dazwischen

Unterjährige Verzinsung

Beispiel: Girokonto, Überziehungszins $i = 0.19$ (nominal)
quartalsweise Zinsabrechnung

Kontostand 1.1.2016 : -1000 €

1. Zinsabrechnung (1.4.2016): $-1000\cdot\left(1+\frac{0.19}{4}\right)$
2. " (1.7.2016): $-1000\cdot\left(1+\frac{0.19}{4}\right)^2$

$\vdots$

4. " (1.1.2017): $-1000\cdot\underbrace{\left(1+\frac{0.19}{4}\right)^4}_{q_{eff}\ \text{(Effektivzinsfaktor)}} = -1203,98$

allgemein:
$$q_{eff} = \left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^m$$

i_{nom} : jährliche Nominalzinssatz
m : Anzahl Zinsabrechnungen pro Jahr
q_{eff} : Effektivzinsfaktor

```
# Mathe VL 30.11.2016

# unterjährige Verzinsung

m = c(1, 2, 4, 12, 52, 365, 365*24, 365*24*3600)
q.eff = function(m){(1+0.19/m)^m}

data.frame(m, q.eff(m))
```

```
##          m q.eff.m.
## 1        1 1.190000
## 2        2 1.199025
## 3        4 1.203971
## 4       12 1.207451
## 5       52 1.208831
## 6      365 1.209190
## 7     8760 1.209247
## 8 31536000 1.209250
```

Vermutung $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$ konvergiert

∞ $e^{0.19} = 1.209249598$

Satz:
$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} e^i$$
stetige Verzinsung

$$q_{eff} = e^i$$

1.20924959358851
$e^{0.19} \approx$ 1.20924959765725

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Beispiel: 2 Konten, Ein- bzw. Ausz.
Zinssatz $i = 0.08$

Zeitpunkt [Jahr]	0	1	2	5	10
Konto A [TE]	100	0	0	0	0
Konto B [TE]	0	20	25	35	35

Idee: Vergleich der Kontostände bei $t = 10$

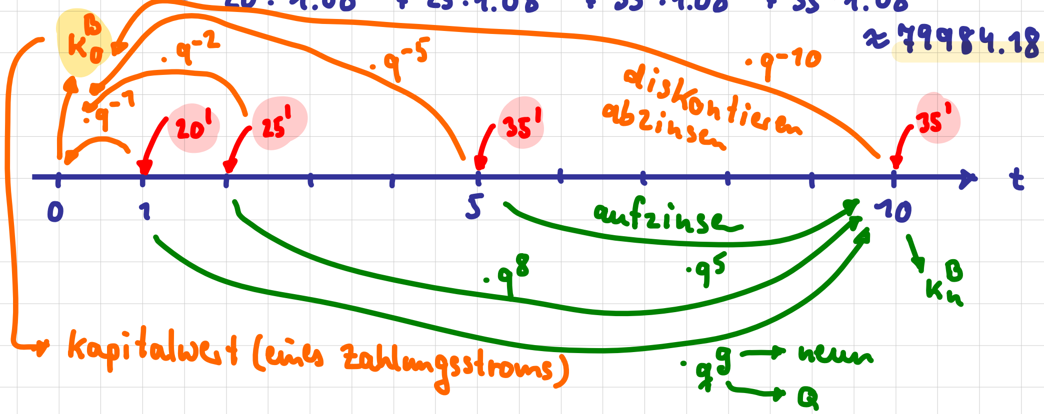
$$K_n^A = 100\,000 \cdot 1.08^{10} = 215892.49$$

$$K_n^B = 20\,000 \cdot 1.08^9 + 25\,000 \cdot 1.08^8 + 35000 \cdot 1.08^5 + 35000 \cdot 1.08^0$$
$$= 172679.83$$

Frage: Welcher einmaligen Zahlung bei $t=0$ entsprechen die Zahlungen auf Konto B?

$$K_n^B = K_0^B \cdot q^n \iff K_0^B = K_n^B \cdot q^{-n}$$

$$K_0^B = (20' \cdot 1.08^9 + 25' \cdot 1.08^8 + 35' \cdot 1.08^5 + 35' \cdot 1.08^0) \cdot 1.08^{-10}$$
$$= 20' \cdot 1.08^{-1} + 25' \cdot 1.08^{-2} + 35' \cdot 1.08^{-5} + 35' \cdot 1.08^{-10}$$
$$\approx 79984.18 \text{ €}$$



Allgemein:

$$\boxed{K_0 = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}}$$

A_t: Zahlung zum Zeitpunkt t
q: (Kalkulations-) Zinsfaktor

K_0: Kapitalwert, $A_t \cdot q^{-t}$: diskontierte Zahlung, Barwert der Zahlung

Beobachtungen:
- Zwei Zahlungsströme sind finanzmath. äquivalent, wenn ihre Kapitalwerte gleich hoch sind
- Nur Projekte mit positivem Kapitalwert sind rentabel

- Kalkulationszinsatz beinhaltet bei Projektbewertungen meist einen Risikoaufschlag

Gliederung

8 Finanzmathematik

- Zinsen
- Renten
- Tilgung
- Kursrechnung

- Zinsen: Gebühr, die ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlt
- Betrag der Zinsen (Z): Abhängig von Höhe des überlassenen Kapitals K, dem vereinbartem Zinssatz und der Dauer der Überlassung

Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
K_0	Betrag zu Beginn
K_t	Betrag zum Zeitpunkt t
K_n	Endbetrag (Zeitpunkt n)
n	ganzzahlige Laufzeit
Z_t	Zinsen zum Zeitpunkt t
$i = \frac{p}{100}$	(konstanter) Zinssatz
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
p	(Prozentzinssatz)

Einfache Verzinsung

- Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \end{aligned}$$

- Gesetzlich vorgeschrieben für Verzugszinsen und bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen
(BGB, §248)
- K_0 unbekannt: Barwert K_0 über Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung
- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Unterjährige einfache Verzinsung: Sparbuchmethode

- Sparbuchmethode: Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen,
- Maximal: 360 Zinstage pro Jahr
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Dazu: Berechnung des Bruchteils eines Zinsjahres über die Anzahl der Zinstage $t \in \{0, 1, \ldots, 360\}$
- Regeln: Einzahlungstag wird komplett verzinst, Auszahlungstag gar nicht
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

Die Zinseszinsformel

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q \\ K_2 &= K_1 \cdot (1+i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\ K_3 &= K_2 \cdot (1+i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

- Damit: Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$K_0 = K_n q^{-n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- q^{-n} heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Anzahl Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),

  gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung unter Verwendung der Sparbuchmethode zur Bestimmung der Anzahl der Zinstage

Gemischte Verzinsung: Beispiel

Beispiel

Am 15.9.2016 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (letzter Zinstag 20.9.2023)?

Lösung:

$$15.9. \ \hat{=}\ (9-1)\cdot 30 + 15 = 255$$
$$\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255-1) = 106$$

$$20.9. \ \hat{=}\ (9-1)\cdot 30 + 20 = 260$$
$$\Rightarrow \Delta t_2 = 260$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$
$$= 15\,541{,}20$$

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.16 bis 14.9.23; dazu 6 Tage)

- Würde man die **Zinseszinsformel** mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.16 bis zur Auflösung am 21.10.23), so ergäbe sich …

$$
\begin{aligned}
K_x &= 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right) \\
&= 15\,540{,}31
\end{aligned}
$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

Unterjährige Verzinsung

- Abrechnung und Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Abständen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Bei m Zinsabschnitten pro Jahr heißt gegeben, so heißt:

- der Zins i oder i_{nom} der nominelle Jahreszins oder Jahreszins,
- $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins,
- i_{kon} der zu i konforme Periodenzins, mit dem die periodische Verzinsung über i_{rel} zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i_{\text{kon}})^m = (1 + i)$$

Unterjährige Verzinsung

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie periodische Verzinsung mit i_{rel}. (Entsprechendes gilt für q_{rel}, $q$kon, q_{eff}).

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 \cdot q_{\text{rel}}^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}} \\
\Rightarrow q_{\text{eff}} &= q_{\text{rel}}^m
\end{aligned}
$$

$$\text{mit } q_{\text{rel}} = 1 + i_{\text{rel}} = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{rel}})^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_{\text{rel}})^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- **Anmerkung**: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von $10\,000$ € soll zu $5\,\%$ nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15.9.2016 (15.10.2016) wurden 12 000 € zu **effektiv** 3,75 % angelegt.
Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (21.10.2023)?

Lösung

- Verwendung des konformen Zinses auf täglicher Basis,
- also $q_{\text{kon}} = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right)\right]^{n} = K_0 \left(e^{i}\right)^{n}$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^{i} - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

Beispiel (überzogenes Girokonto)

$K_0 = 10\,000\,€$, $n = 5$, nominaler Jahreszins $i = 0{,}19$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}19 \cdot 5} = 25\,857{,}10\,€$$

$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}19} - 1 = 20{,}925\,\%$$

Anmerkungen

- Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	19,903	20,397	20,745	20,925

- Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Beginn des 2. Zinszeitraums (1.1. des 2. Jahres).
  - $t = 2$ Beginn des 3. Zinszeitraums (1.1. des 3. Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzten Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000$, $t_A = 2$, $p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43 \text{ €}$$

Eine Zahlung von € 12 250,43 nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € 10 000 nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

Zahlungsströme, Barwert, Endwert

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \ldots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$
\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
\Leftrightarrow \quad q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(A_t) \sim (B_t) \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t)\, q^{-t} = 0
$$

Investitionsrechnung: Beispiel

Beispiel

Kalkulationszinssatz gleich $5\,\%$. Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1000	0	1000	0	1000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} A_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 0 \cdot 1{,}05^{0} + 1000 \cdot 1{,}05^{-1} + 0 \cdot 1{,}05^{-2} + 1000 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 0 \cdot 1{,}05^{-4} + 1000 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2599{,}74\end{aligned}$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} B_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 400 \cdot 1{,}05^{0} + 400 \cdot 1{,}05^{-1} + 400 \cdot 1{,}05^{-2} + 600 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 600 \cdot 1{,}05^{-4} + 600 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2625{,}80\end{aligned}$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)