Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

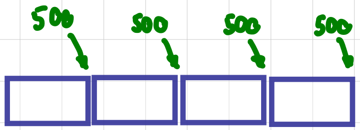
Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Renten $\widehat{=}$ Regelmäßige Zahlungen in konstanter Höhe

Beispiel: 4 Jahre jeweils zum Jahresende sollen 500 € auf Konto eingezahlt werden $(i = 0.05)$

gesucht: Kontostand am Ende des 4. Jahres

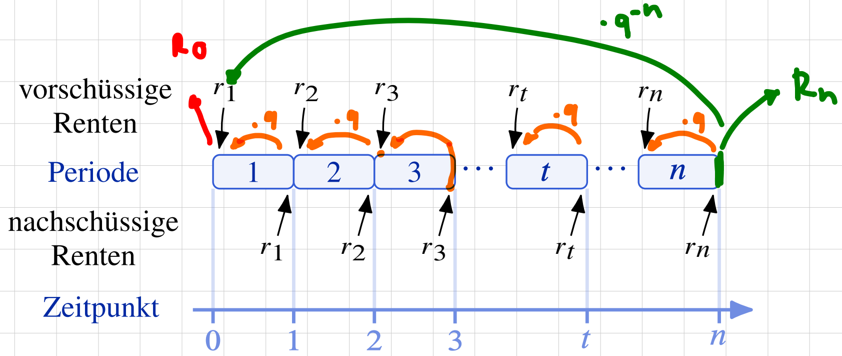
$$k_n = 500\cdot 1.05^3 + 500\cdot 1.05^2 + 500\cdot 1.05^1 + 500\cdot 1.05^0$$
$$= 500\cdot(\underbrace{1.05^0 + 1.05^1 + 1.05^2 + 1.05^3}_{\text{geometrische Reihe}})$$



$$= 500\cdot\frac{1.05^4-1}{1.05-1} \approx 2155.06\ €$$

allgemein: n nachschüssige Zahlungen in Höhe von r zum Zinsfaktor q

$$R_n = r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$ nachschüssiger Rentenendwert

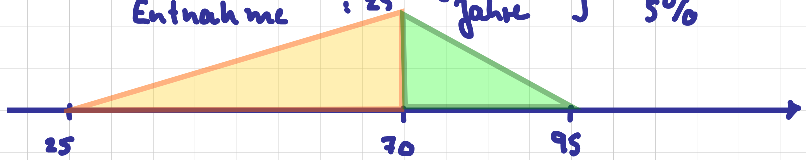


$$R_n = r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q$$ vorschüssiger Rentenendwert

Endwert $\xrightarrow{\cdot q^{-n}}$ Barwert, Barwert $\xrightarrow{\cdot q^{n}}$ Endwert; nachschüssig $\xrightarrow{\cdot q}$ vorschüssig, vorschüssig $\xrightarrow{\cdot q^{-1}}$ nachschüssig

	Endwert	Barwert
nachschüssig	$R_n = r\,\frac{q^n-1}{q-1}$	$R_0 = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q^{-n} = R_n\cdot q^{-n}$
vorschüssig	$R'_n = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q = R_n\cdot q$	$R'_0 = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q\cdot q^{-n} = R_n\cdot q\cdot q^{-n}$

Beispiel: Ansparphase: 45 Jahre, Entnahme: 25 Jahre } Zinssatz 5%



Entnahme: 100 000 € vorschüssig jährlich

gesucht: Ansparrate (jährlich nachschüssig)

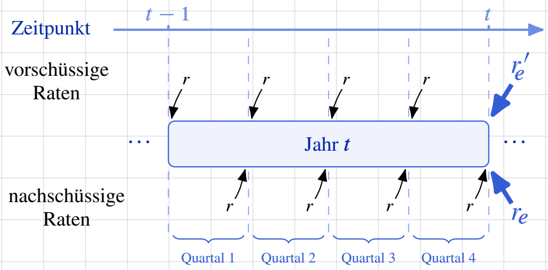
Idee: Setze nachsch. Rentenendwert der Ansparphase gleich vorsch. Rentenbarwert der Entnahmephase

$$R_n^A = R_0^E$$

$$r\cdot\frac{1.05^{45}-1}{1.05-1} = 100000\cdot\frac{1.05^{25}-1}{1.05-1}\cdot 1.05\cdot 1.05^{-25}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\dots}{\dots} \approx 9266{,}52\ €$$

Unterjährige Raten



Achtung: Rentenersatzrate wird immer in nachschüssige Rentenformel eingesetzt

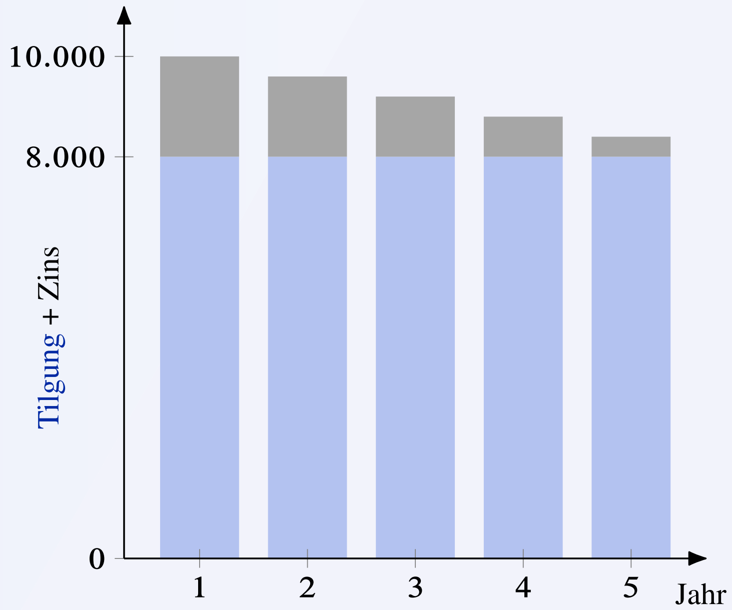
Tilgung ≙ zurückzahlen einer Schuldsumme S
Ratentilgung ≙ Tilgungsraten sind konstant

Für $S = 40\,000$ €, $i = 0.05$, $n = 5$ ergibt sich bei jährlicher Ratentilgung $T = \frac{40\,000}{5} = 8000$ sowie nachfolgender Tilgungsplan:

Restschuld zu Beginn — Zinsen — Tilgung — Annuität $= Z + T$

k	R_k	Z_k	T_k	A_k
1	40 000	2000	8000	10 000
2	32 000	1600	8000	9600
3	24 000	1200	8000	9200
4	16 000	800	8000	8800
5	8000	400	8000	8400
Summe		6000	40 000	46 000

Die gesamte Zinsbelastung in 5 Jahren beträgt hier 6000 €.



Annuitätentilgung ≙ A_t sind konstant

Tilgung	Renten
Schuldsumme S	nachsch. Rentenbarwert
Annuität A	jährl. nachsch. Rate r
$S = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \, q^{-n}$	$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n}$

Restschuld nach t Jahren:

$$S \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Für $S = 40\,000$ €, $i = 0.05$, $n = 5$ ergibt sich bei jährlicher Annuitätentilgung gerundet

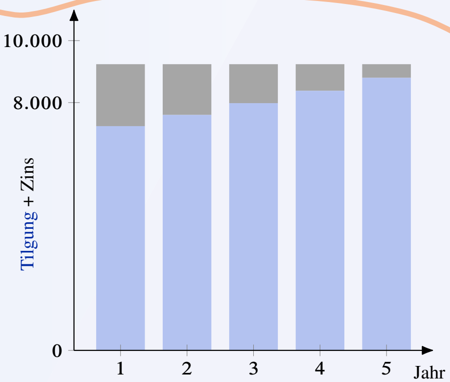
$$A = 40\,000 \cdot 1,05^5 \cdot \frac{0.05}{1.05^5 - 1} = 9238,99 \text{ €}$$

sowie folgender Tilgungsplan

Restsch. zu Beginn — Zins — Tilgung — Annuität

k	R_k	Z_k	T_k	A_k
1	40 000.00	2000.00	7238.99	9238.99
2	32 761.01	1638.05	7600.94	9238.99
3	25 160.07	1258.00	7980.99	9238.99
4	17 179.08	858.95	8380.04	9238.99
5	8799.04	439.95	8799.04	9238.99
Summe		6194.95	40 000.00	46 194.95

Die sich ändernde Aufteilung der Annuitäten in Tilgungs- und Zinszahlungen zeigt die folgende Figur 26.5.



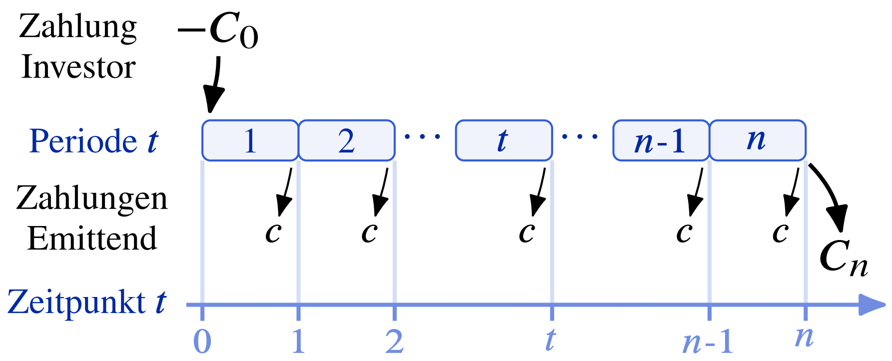
gesucht:

Restschuld nach 3 Jahren (zu Beginn des 4. Jahres)

$$S \cdot q^t - A \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

$$= 40000 \cdot 1.05^3 - 9238.99 \cdot \frac{1.05^3 - 1}{1.05 - 1}$$

$$\approx 17179.08$$



Zahlung Investor
$-C_0$
Periode t
1
2
t
n-1
n
Zahlungen Emittend
c
C_n
Zeitpunkt t
0
1
2
t
n-1
n

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \ldots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
q	Zinsfaktor
R_0	Barwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Nachschüssige konstante (endliche) Renten

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\ &= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\ &= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\ &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Rentenendwert und Rentenbarwert

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \mathrm{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \mathrm{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:

Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$R_{10} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,000 \cdot 12{,}006107$$

$$= 144\,073{,}28 \quad [€]$$

Beispiel Rentenbarwert

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$R_0 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}}$$

$$\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896$$

$$\approx 97\,330{,}75 \quad [€]$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q .
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\
&= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\
&= 83\,876{,}01 \quad [\text{€}\,]
\end{aligned}
$$

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
r &= 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1} \\
&= 10\,380 \cdot 0{,}096342 \\
&= 1\,000{,}03 \quad [\text{€}]
\end{aligned}
$$

Vorschüssige konstante Renten

- Rentenbetrag wird jeweils zu **Beginn der Zinsperiode** in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \cdots = r'_n = r'$ bezahlt.
- äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \text{VREF}_{p,n}$$

- **VREF**: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor
- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\ &= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \quad = \quad r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \text{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- **VRBF**: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Unterjährige Raten und jährliche Verzinsung

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente **nachschüssig**:

$$\begin{aligned} r_e &= r + r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right) \\ &\quad + r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right) \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + r\cdot\left(1+\frac{m-1}{m}\cdot i\right) \\ &= r\cdot m \\ &\quad + i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+(m-1)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m + i\cdot\frac{m-1}{2}\right]}$$

falls unterjährige Rente **vorschüssig**:

$$\begin{aligned} r_e &= r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right) \\ &\quad + r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right) \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + r\cdot\left(1+\frac{m}{m}\cdot i\right) \\ &= r\cdot m \\ &\quad + i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+m\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m + i\cdot\frac{m+1}{2}\right]}$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$\begin{aligned} R_0 &= \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q - 1} = \frac{r}{i} \end{aligned}$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Ewige Renten: Beispiel

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

- Anmerkung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

Tilgungsrechnung

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld nach k Jahren
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zins am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
A_k	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

R_k	$= S - k \cdot T$	Restschuld nach k Jahren
Z_k	$= R_{k-1} \cdot i$	Zins am Ende des k-ten Jahres
A_k	$= Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

Annuitätentilgung

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot q^k - A\dfrac{q^k - 1}{q - 1}$	Restschuld nach k Jahren
$Z_k = R_{k-1} \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr

Gliederung

9 Lineare Algebra

- Matrizen und Vektoren
- Matrixalgebra
- Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
- Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrizen
- Determinanten
- Eigenwerte

Warum beschäftigen wir uns mit linearer Algebra?

- Quantitative tabellarische Daten (Excel) sind aus betriebs- und volkswirtschaftlichen Fragestellungen nicht wegzudenken
- Methoden der Matrizenrechnung erleichtern beziehungsweise ermöglichen die Analyse solcher Daten

Wesentliche Lernziele

- Kennenlernen der Eigenschaften von Matrizen
- Beherrschen elementarer Matrixoperationen
- Fähigkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen, zu lösen und diese Lösung darzustellen
- Beherrschen des Invertierens spezieller Matrizen

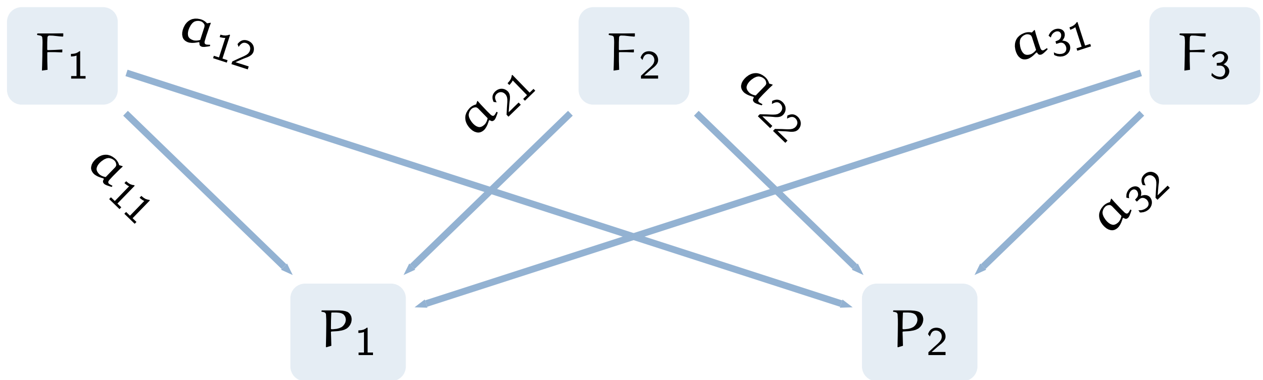
Einführung

Beispiel 1

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 zwei Produkte P_1, P_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit von P_j $(j = 1{,}2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von F_i $(i = 1{,}2{,}3)$ verbraucht.

Verbrauch		für eine Einheit des Produkts	
		P_1	P_2
von Einheiten	F_1	a_{11}	a_{12}
der	F_2	a_{21}	a_{22}
Produktionsfaktoren	F_3	a_{31}	a_{32}

- Grafisch dargestellt:



Beispiel (Stückliste)

$x_1, x_2 \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Produkte P_1, P_2

$y_1, y_2, y_3 \mathrel{\hat{=}}$ Anz. d. Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 \\ y_2 &= a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 \\ y_3 &= a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 2 \;\; 2\times 1}{A\cdot x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y$$

$$\begin{tikzcd} F_1, \dots, F_m \arrow[d, "A_{m,n}"] \\ P_1, \dots, P_n \end{tikzcd}$$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$y = A\cdot x$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} F_1, \dots, F_m \arrow[dd, "A_{m,n}"'] \arrow[d, "B_{m,l}"] & \\ z_1, \dots, z_l \arrow[d, "C_{l,n}"] \\ P_1, \dots, P_n \end{tikzcd}$$

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix}$

$$y = \underbrace{\overset{m\times n \;\; n\times 1}{A\cdot x}}_{m\times 1} + \underbrace{\overset{m\times l \;\; l\times 1}{B\, z}}_{m\times 1}$$

$$z = C\cdot x$$

$$\Rightarrow y = Ax + B\cdot(Cx) = Ax + B\cdot C\, x = (A + BC)\, x$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (A + BC)\cdot x$$

Merke:
- Serielle Verknüpfung $\hat{=}$ Multiplikation
- Parallele Äste $\hat{=}$ Addition

Beispiel (Marktforschung):

Abgeschlossener Markt mit 1 Produkt,
3 Hersteller,

Wechselverhalten der Käufer über Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$

a_{ij}: Anteil der Käufer, die zum Zeitpunkt t Produkt i gekauft haben und z. Z. t+1 zum Produkt j wechseln

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a_{23}: 30% der „heutigen" P_2-Käufer wechseln „morgen" zu P_3

Jetzt gegeben: Marktverteilung zum Zeitpunkt t

$$x_t^T = (0{,}8 \quad 0{,}2 \quad 0)$$

Marktverteilung zum Zeitpunkt t+1 („morgen"):

$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = \underset{1\times 3}{(0{,}8 \quad 0{,}2 \quad 0)} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}}$$

$$= (0.34 \quad 0.28 \quad 0.38)$$

$$x_{t+2}^T = x_{t+1}^T \cdot A = (0.202, 0.274, 0.524)$$

$$x_{t+3}^T = x_{t+2}^T \cdot A = x_{t+1}^T \cdot A \cdot A = x_t^T \cdot A \cdot A \cdot A$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{t+3}^T = x_t^T \cdot A^3$$

Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \ldots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

		Merkmale		
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	A
	P_2	18	sehr gut	B
	P_3	20	sehr gut	A
	P_4	16	mäßig	C
	P_5	18	ordentlich	B

Fragen:

- Ähnlichkeit von Produkten
- Finden von Kundensegmenten
- Zuordnen zu diesen Segmenten

$\longrightarrow$ Marktforschung

Definition Matrix

- Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Zahlen oder Symbolen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder kurz $m \times n$-Matrix (Im Folgenden: $a_{ij} \in \mathbb{R}$).

„m kreuz n"

- $a_{11}, \dots, a_{mn}$ heißen Komponenten der Matrix.
- Dabei gibt i die Zeile und j die Spalte an, in der a_{ij} steht.
- i heißt Zeilenindex und j Spaltenindex von a_{ij}.
- Sind alle Komponenten a_{ij} reelle Zahlen, so spricht man von einer reellen Matrix.

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

Transponierte Matrix

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

$$\Rightarrow \left(A^T\right)^T = A$$

Beispiel transponierte Matrix

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2x5 - Matrix

5x2 - Matrix

Beispiel transponierte Matrix

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition

- $n \times 1$-Matrix heißt Spaltenvektor mit n Komponenten:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- $1 \times n$-Matrix heißt Zeilenvektor mit n Komponenten:

$$a^T = (a_1, \ldots, a_n)$$

Geometrische Veranschaulichung von Vektoren

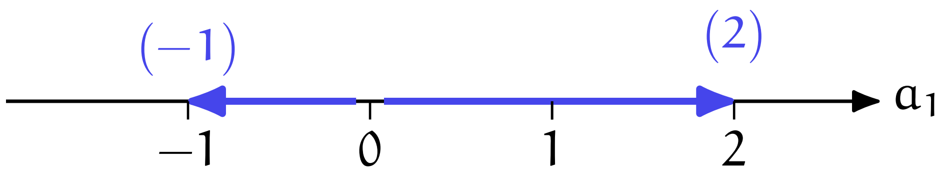


Abbildung: Vektoren im $\mathbb{R}^1$

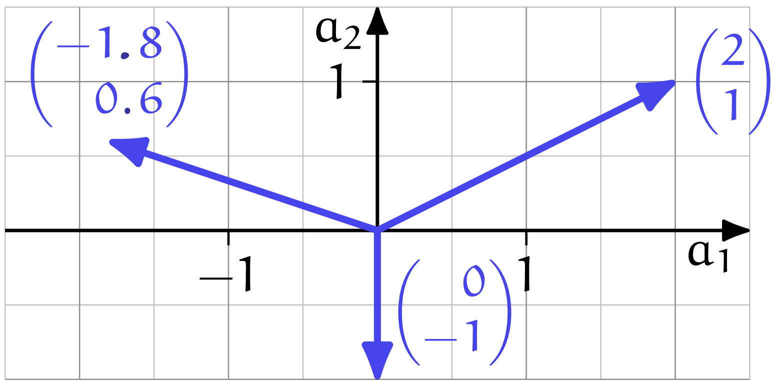


Abbildung: Vektoren im $\mathbb{R}^2$

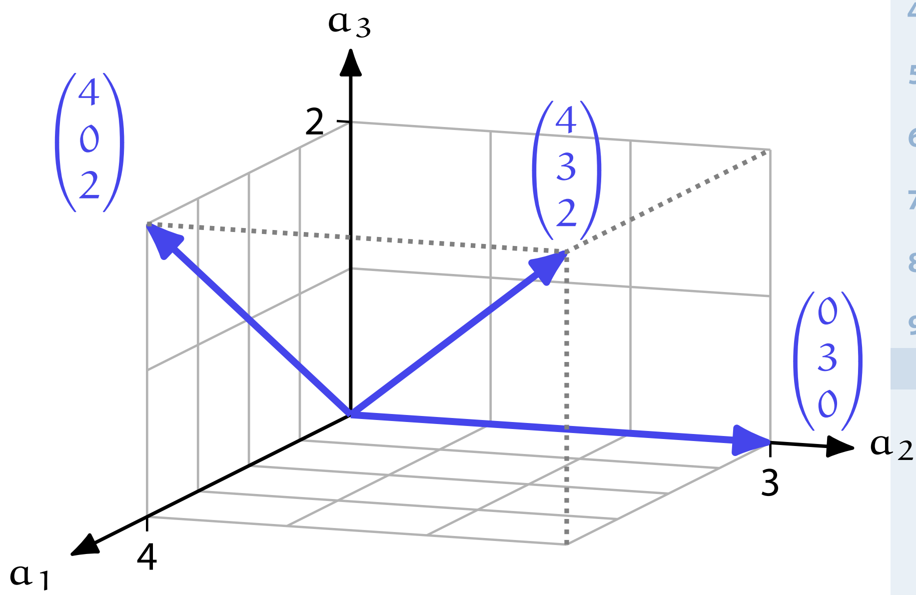


Abbildung: Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Relationen zwischen Matrizen

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\cancel{A = B}$ nicht definiert

$A \neq B^T$

$A \nleqslant B^T$ (denn $a_{23} = 1 \nleqslant 0 = b_{23}$)

Definition

- Seien $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$ reelle Matrizen mit übereinstimmender Zeilenzahl m und Spaltenzahl n.
- Dann wird definiert:

$$\begin{array}{lcll} A = B & \Leftrightarrow & a_{ij} = b_{ij} & \text{für alle } i = 1, \dots, m\,, j = 1, \dots, n \\ A \neq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \neq b_{ij} & \text{für mindestens ein Indexpaar } (i,j) \\ A \leqslant B & \Leftrightarrow & a_{ij} \leqslant b_{ij} & \forall (i,j) \\ A < B & \Leftrightarrow & a_{ij} < b_{ij} & \forall (i,j) \end{array}$$

- Entsprechend $A \geqslant B$ und $A > B$.

Definition

a) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt quadratisch

Hauptdiagonale a_{ii}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit $A = A^{T}$ heißt symmetrisch

c) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Dreiecksmatrix, wenn
$a_{ij} = 0$ für $i < j$ (untere Dreiecksmatrix) oder
$a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix

d) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

e) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Einheitsmatrix, wenn $a_{ii} = 1$ für alle i und
$a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$.
- Dann gilt:
- Addition: $A + B = (a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
- Subtraktion: $A - B = (a_{ij})_{m,n} - (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m,n}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Damit:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Addition/Subtraktion nicht definiert, wenn Zeilen- bzw. Spaltenzahl nicht übereinstimmen

Skalare Multiplikation

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r \in \mathbb{R}$ (Skalar).
- Dann gilt:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij})_{m,n} = (r \cdot a_{ij})_{m,n} = (a_{ij} \cdot r)_{m,n} = A \cdot r$$

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{array}{lcll} (rs)A & = & r(sA) & \text{(Assoziativgesetz)} \\ (r+s)A & = & rA + sA & \text{(Distributivgesetz)} \\ r(A+B) & = & rA + rB & \end{array}$$

$\underset{3\times 4}{A}, \underset{2\times 3}{B}$ $\quad \underset{2\times 3}{B}\cdot\underset{3\times 4}{A}$ ✓

$\underset{3\times 4}{A}\cdot\underset{2\times 3}{B}$ → nicht definiert

$\underset{3\times 4}{A}\cdot\underset{3\times 2}{B^T}$

$\underset{4\times 3}{A^T}\cdot\underset{3\times 2}{B^T}$ definiert

- Gegeben:
  $A = (a_{ik})_{m,p}$
  und $B = (b_{kj})_{p,n}$.
- Dann gilt:

$$A \cdot B = (a_{ik})_{m,p} \cdot (b_{kj})_{p,n} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)_{m,n}$$

- Merke:
  Zeile mal Spalte!

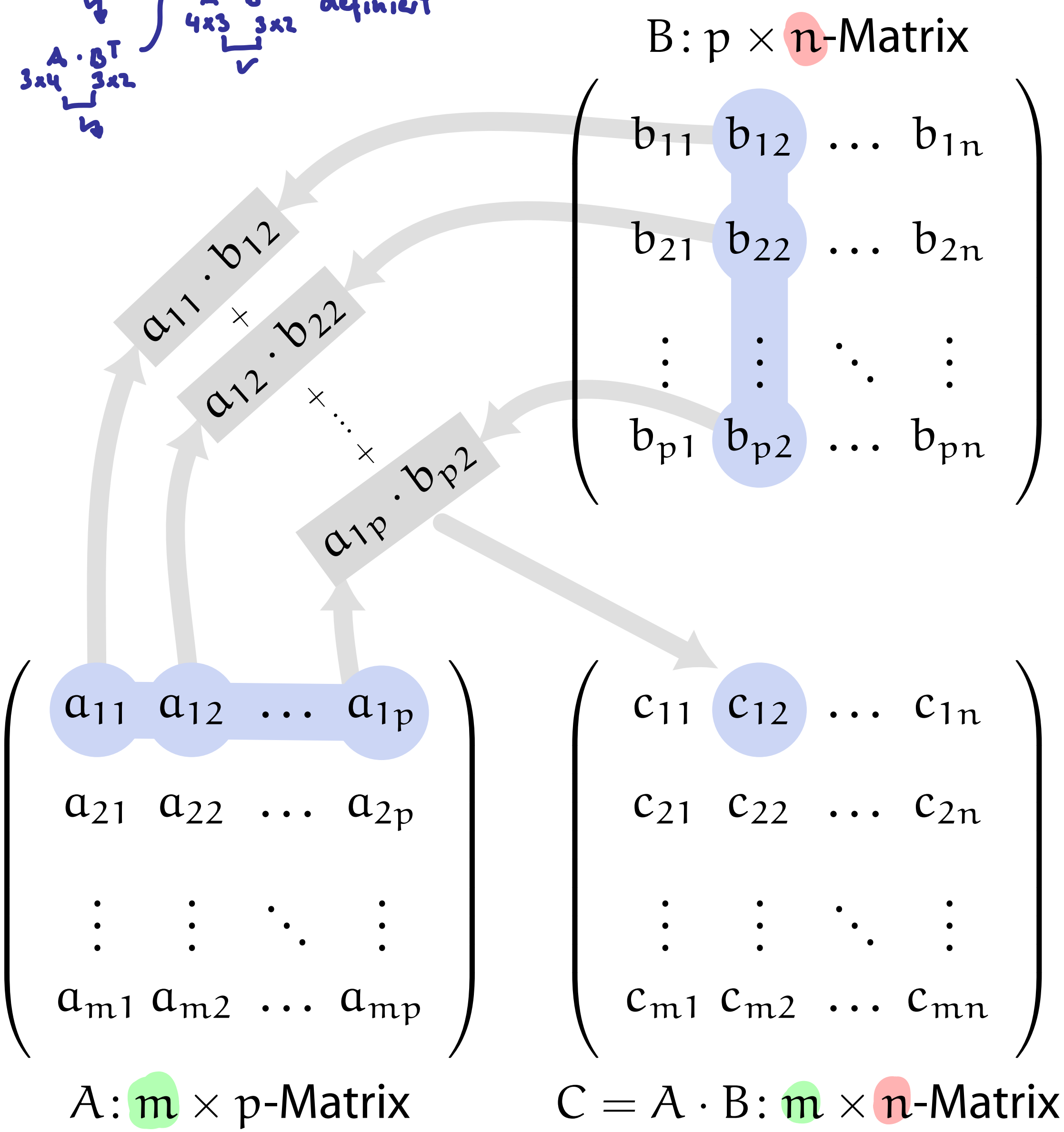


Abbildung: Schema zur Matrixmultiplikation

Beispiel: $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\underset{2\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A}}_{\checkmark}$

$1\cdot 2 + 4\cdot 3$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$1\cdot 0 + 4\cdot 1$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 4 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 15 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle und Rechenregeln

Spezialfälle der Matrixmultiplikation

- $A = (m \times n)$-Matrix, $B = (n \times m)$-Matrix
  $\Rightarrow$ es existiert $A \cdot B$ und $B \cdot A$
- A quadratisch $\Rightarrow$ $A \cdot A = A^2$ existiert
- A, B quadratisch $\Rightarrow$ $A \cdot B$ existiert und $B \cdot A$ existiert.
  Aber: Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Ist E Einheitsmatrix, dann gilt:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Spezielle Rechenregeln

- $A = (m \times p)$-Matrix, $B = (p \times n)$-Matrix. Damit gilt:
- $A \cdot B$ und $B^T \cdot A^T$ existieren.
- $B^T A^T = (A \cdot B)^T$
- $A^T A$ ist symmetrische $(p \times p)$-Matrix und
  $A A^T$ ist symmetrische $(m \times m)$-Matrix