Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Punktmengen in $\mathbb{R}^n$

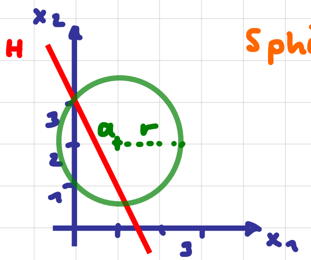
Gegeben: Vektor $a \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\|a\|}_{\text{Norm / Länge von } a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Hyperebene: $H(a,b) = \{ x \in \mathbb{R}^n : a^T \cdot x = b \}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

z.B. $H = \{ x \in \mathbb{R}^2 : (2,1) \cdot \binom{x_1}{x_2} = 3 \}$

$= \{ x : \quad 2x_1 + 1 \cdot x_2 = 3 \}$



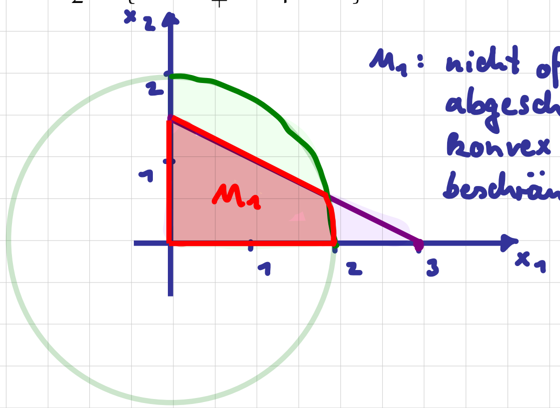
Sphäre: $k(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| = r \}$
$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

Beispiel: $k = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \| x - \binom{2}{1} \| = 1.5 \}$

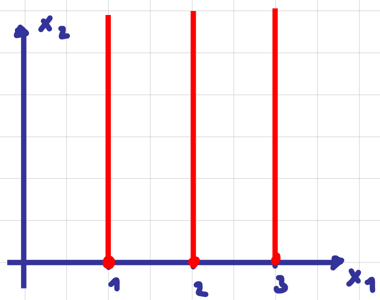
Eigenschaften von Punktmengen: Beispiele

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + 2x_2 \leqq 3, \ \|x\| \leqq 2\}$

$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x_1 \in \mathbb{N}\}$



M_1: nicht offen,
abgeschlossen
konvex
beschränkt



M_2: nicht offen,
abgeschlossen,
nicht konvex,
nicht beschränkt

Norm

- Gegeben Vektor $a \in \mathbb{R}^n$
- **Definition**: Absolutbetrag, Norm oder Länge eines Vektors:

$$\|a\| = |a| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{{a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \quad \in \mathbb{R}_+$$

- Seien a, b, c Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

a) $\|a+b\| = \|b+a\|\,, \qquad \|a-b\| = \|b-a\|$

b) $\|ra\| = |r| \cdot \|a\|$

c) $\left\|a^T b\right\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$ für $n > 1$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$\qquad = |a| \cdot |b|$ für $n = 1$

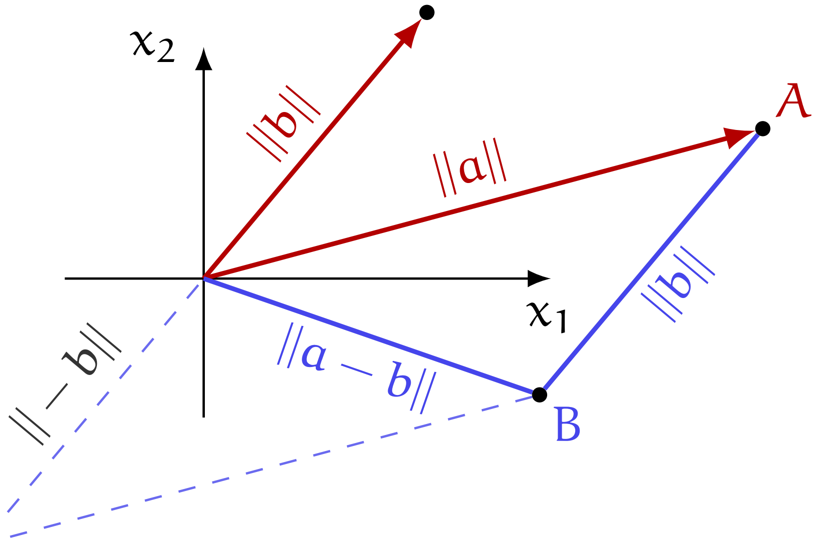
d) $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung)

e) $\|a-c\| - \|c-b\| \leqq \|a-b\| \leqq \|a-c\| + \|c-b\|$

Kosinussatz

- Gegeben: a, b Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die den Winkel γ einschließen.
- Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck mit den Ecken $0, A, B$

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma.$$



- Damit gilt:

$$\begin{aligned} a^T b &= \tfrac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

Hyperebenen und Sphären

Definition Hyperebene

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$
- Dann heißt $H(a, b) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\right\}$ **Hyperebene** im $\mathbb{R}^n$
- **Anmerkung**: H teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume

Definition Sphäre

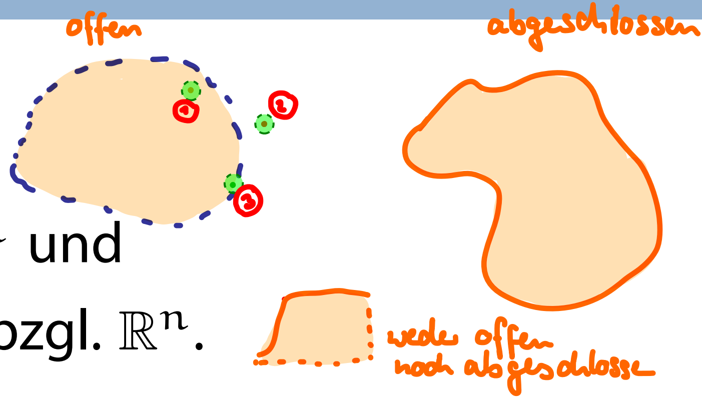
- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$
- Dann heißt $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ **Sphäre** (Kugelfläche) im $\mathbb{R}^n$ und dem Radius r
- Damit: **r-Umgebung von a**: $K_<(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

Beispiel Hyperebene/Sphäre

Beispiele

- $H = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6\right\}$
- $$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\ \left\| x - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1\right\}$$
  $$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + {x_3}^2} = 1\right\}$$

Offenheit, Abgeschlossenheit



Gegeben

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ und
- $\overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus M$ deren Komplement bzgl. $\mathbb{R}^n$.

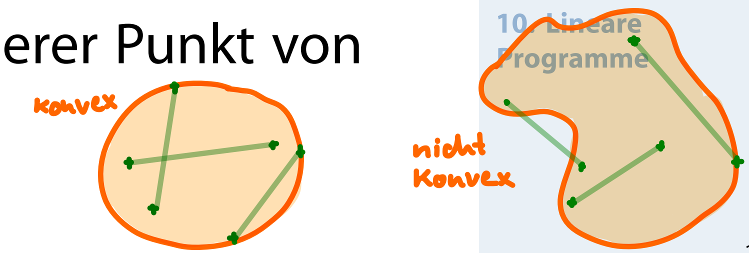
Dann heißt:

$K_<(a,r) = \{x : \|x-a\| < r\}$

- $a \in \mathbb{R}^n$ 1 innerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a,r)$ von a existiert, die ganz in M liegt, also $K_<(a,r) \subseteq M$,
- $a \in \mathbb{R}^n$ 2 äußerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a,r)$ von a existiert, die ganz in $\overline{M}$ liegt und
- $a \in \mathbb{R}^n$ 3 Randpunkt von M, wenn a weder innerer noch äußerer Punkt von M ist.

Eine Punktmenge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt dann

- offen wenn jedes Element $a \in M$ innerer Punkt von M ist,
- abgeschlossen, wenn jedes Element $a \in \overline{M}$ innerer Punkt von $\overline{M}$ ist, also das Komplement $\overline{M}$ offen ist.



Beschränktheit, Kompaktheit

Eine Punktmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- **beschränkt nach oben**, wenn ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $b \geqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt nach unten**, wenn ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $a \leqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt**, wenn M nach oben und unten beschränkt ist,
- **kompakt**, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; x_1 + 2x_2 \leqq 3, \; \|x\| \leqq 2\}$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; x_1 \in \mathbb{N}\}$$

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \; 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ ② \; 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{array}\right\} \quad ② - ①: \; 5x_2 = 5 \iff x_2 = 1$$

in ②: $x_1 = 1$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\}$$ keine Lösung

c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\}$$

$\cdot(-\tfrac{1}{2})$: $x_1 - x_2 = 1$ unendl. viele Lsg.

Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Dazu gibt es:

- Den Gaußschen Algorithmus (erzeugt Dreiecksmatrix)
- das Verfahren von Gauß-Jordan (modifizierte Gauß: erzeugt Einheitsmatrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem

- Ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- heißt lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.
- Die a_{ij} und b_i heißen Koeffizienten des Gleichungssystems.
- In Matrixform:

$$\begin{array}{l} 5x_1 - 3x_2 = 1 \\ \quad\;\; 2x_2 = 4 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + (-3)x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Lösungsmenge:

$$L = \{x : \quad Ax = b\}$$

Lösungsdarstellung

- Beispiel für Enddarstellung:

Basis

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \quad x_3 \qquad\quad &= 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{\text{Rest}}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Nichtbasis

- Dabei bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

- kann nach Basisvariablen aufgelöst werden:
  $x_1 = 4 - x_3, \quad x_2 = 7 - 3x_3 - 2x_4$ (allgemeine Lösung)
- In diesem Fall immer lösbar, zum Beispiel mit

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Gesucht: Verfahren zur Überführung beliebiger Gleichungssysteme in diese Form

Lösung von LGS

Elementare Umformungen

- Das sind Umformungen der Koeffizientenmatrix, die die Lösung nicht verändern. Erlaubt ist
- Multiplikation einer Zeile mit beliebigen Zahlen $c \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Vertauschen von Zeilen (oder Spalten)

Lösungsalgorithmus

- Lösung mit Verfahren von Gauß-Jordan: Systematische Umformungen nach obigem Prinzip, bis Darstellung der Koeffizienten-matrix in Einheits- und Restmatrix ensteht
- Algorithmus und Lösungsvarianten siehe Vorlesung

Beispiel (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Pivot-Zeile Pivot-Element

	x_1	x_2	x_3		
①	1	1	1	0	
②	4	2	1	1	
③	9	3	1	3	
④	1	1	1	0	①
⑤	0	-2	-3	1	② − 4·①
⑥	0	-6	-8	3	③ − 9·①
⑦	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	④ + $\frac{1}{2}$ ⑤
⑧	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ · ⑤
⑨	0	0	1	0	⑥ − 3⑤
	1	0	0	$\frac{1}{2}$	⑦ + $\frac{1}{2}$ ⑨
	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	⑧ − $\frac{3}{2}$ ⑨
	0	0	1	0	⑨

Einheitsmatrix kein Rest

⇒ genau 1 Lösung: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$

Beispiel 2, 3 → siehe Videos

https://goo.gl/BD9TO5
https://goo.gl/jmHnMX

Beispiel 2:

	x_1	x_2	x_3		
①	1	2	-4	1	
②	2	1	-2	0	
③	1	-4	8	0	
④	1	-4	8	0	③
⑤	0	6	-12	1	① − ③
⑥	0	9	-18	0	② − 2③
⑦	1	0	0	0	④ + $\frac{4}{9}$ ⑥
⑧	0	1	-2	0	$\frac{1}{9}$ ⑥
⑨	0	0	0	1	⑤ − $\frac{6}{9}$ ⑥

⑨: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ (immer falsch)

⇒ keine Lösung

Beispiel 3:

	x_1	x_2	x_3	x_4		
①	1	5	2	3	4	
②	4	18	2	8	12	
③	3	11	-6	1	4	
④	0	2	6	4	4	
⑤	1	5	2	3	4	①
⑥	0	-2	-6	-4	-4	② - 4①
⑦	0	-4	-12	-8	-8	③ - 3①
⑧	0	2	6	4	4	④
	1	0	-13	-7	-6	⑤ - $\frac{5}{2}$⑧
	0	1	3	2	2	$\frac{1}{2}$⑧
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	⑥ + ⑧
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	⑦ + 2⑧

komplette Nullzeilen streichen

Einheitsmatrix und Restmatrix
→ unendlich viele Lösungen
→ Nichtbasisvariablen (x_3, x_4) sind frei wählbar

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 13x_3 + 7x_4 - 6 \\ x_2 &= -3x_3 - 2x_4 + 2 \end{aligned}$$

Vektorielle Lösungsdarstellung:

Setze: $x_3 = a,\ x_4 = b \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 13a + 7b - 6 \\ x_2 &= -3a - 2b + 2 \\ x_3 &= 1\cdot a + 0\cdot b + 0 \\ x_4 &= 0\cdot a + 1\cdot b + 0 \end{aligned}\right\} L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

„Lösungsmenge" „4x1-Vektoren"

Beispiel: Invertierung einer Matrix

geg.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, ges.: A^{-1}

	A		E		
①	-1	2	1	0	
②	5	10	0	1	
③	1	-2	-1	0	$-1\cdot$①
④	0	20	5	1	② + 5①
	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	③ + $\frac{1}{10}$④
	0	1	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}\cdot$④
	E		A^{-1}		

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{5}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Invertierung von Matrizen

Definition

- Gegeben: $n \times n$-Matrix (quadratisch)
- Existiert eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = XA = E$, so heißt X die zu A inverse Matrix.
- Schreibweise: $X = A^{-1}$
- $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Inverse Matrizen und Gleichungssysteme

- Falls A^{-1} existiert, gilt:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = x = A^{-1}b$$

- Damit existiert genau eine Lösung und zwar:

$$x = A^{-1}b$$

Berechnung inverser Matrizen durch den Gaußalgorithmus:

- Ansatz:

$$\begin{aligned} & Ax + Ey = 0 \\ \Rightarrow\quad & A^{-1}Ax + A^{-1}Ey = 0 \\ \Rightarrow\quad & Ex + A^{-1}y = 0 \end{aligned}$$

- Also: Gaußtableau mittels elementarer Umformungen folgendermaßen umformen:

$$(A|E) \quad \longrightarrow \quad (E|A^{-1})$$

Orthogonale Matrizen

- Eine $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, wenn gilt:
- $AA^T = A^TA = E$
- Bei orthogonalen Matrizen A gilt also: $A^{-1} = A^T$.
- Mit A ist damit auch A^T orthogonal