Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren,	10
14.12.2016	Lineare Gleichungssysteme	11
21.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

21.12.2016:

- Lineare Planung entfällt (-> 3. Semester)
- Probeklausur ab Weihnachten online
- 11.1.2017 Vorlesung: Besprechung Probeklausur, Wiederholung, Fragen
- 11.1.2017 Übung: im B2.14 als Globalübung für restliche Übungsaufgaben vom 21.12.16 (Übungsgruppen ab 12.1.16 finden nicht statt)

Übungsaufgaben für 21.12.2016:
- A103, 104, 105
- zusätzlich: Lösen Sie jeweils **mit R** die Aufgaben 100 h), 104 d), 105

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Determinanten : Abbildung von quadratischen Matrizen in eine Zahl ($\in \mathbb{R}$)

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$$

$n = 1$: $\det(x) = x$

$n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

(Regel von Sarrus)

Achtung: Sarrus-Regel lässt sich <u>nicht</u> auf $n \geq 4$ übertragen

Beispiel : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = ?$

$$\det A = 1\cdot3\cdot2 + 2\cdot4\cdot2 + (-1)\cdot0\cdot7 - (2\cdot3\cdot(-1) + 7\cdot4\cdot1 + 2\cdot0\cdot2) = 22 - 22 = 0$$

Determinanten für $A_{n \times n}$ mit $n \geq 4$

Definition: A_{ij} (Minor von A) entsteht, indem man Zeile i und Spalte j aus der Matrix A streicht

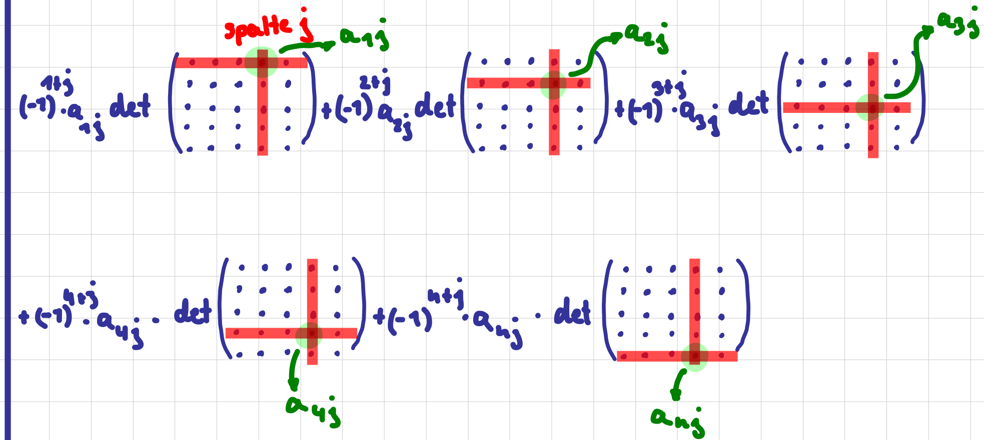
z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ → $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der det A über sog. Entwicklungssatz

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})}$$

Entwickeln nach Spalte j



analog möglich : Entwicklung nach Zeile

Strategie : Suche Spalte/Zeile mit möglichst vielen Nullen

Beispiel :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

entwickle nach 2. Zeile

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ 0 \ldots + 0 \ldots$$
$$+ (-1)^{2+4} \cdot -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot [2\cdot2\cdot1 + 1 - (3\cdot2\cdot1)] - 1 \cdot [1\cdot1\cdot1 - 3\cdot2\cdot1 + 1\cdot2\cdot1]$$

$$= 2 + 3 = 5$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften von Determinanten

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

b) Achtung: i.a. $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

c) äquivalent gilt: $\det A \neq 0$

$\Leftrightarrow$ Lineares Gl.syst. $Ax = b$ hat genau eine Lösung

$\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = n$

„Zeilen, die nach dem Gauß-Algor. stehen bleiben"

d) A orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^T = A^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\det A = \pm 1$

e) $\det(A^T) = \det(A)$

f) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Beispiel: geg. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

gesucht: $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A^T \cdot A^2)$

$\det(A^{-1} \cdot B \cdot A^T \cdot A^2)$

$= \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(A^T) \cdot \det^2(A)$

$= \dfrac{1}{\cancel{\det A}} \cdot \det(B) \cdot \cancel{\det(A)} \cdot \det^2(A)$

$\det A = 1 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1-2) = -15$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{5} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det^2(A) \cdot \det(B) = (-15)^2 \cdot 8 = 1800$

Merke: A Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$ Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A orthogonal

$\det A = 1 \cdot a \cdot a - (-a \cdot a) = 2a^2 = \pm 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1/2}$

Eigenwertprobleme

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}$

gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$\lambda z = A z$

das funktioniert, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$

$\det\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det \begin{pmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 \\ 0 & 1.1-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} (0.8-\lambda)\cdot(1.1-\lambda) - 0 \cdot 0.2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 1.1$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0.8$
$\lambda_2 = 1.1$

Bestimmung der Eigenvektoren über Lösung des Gleichungssystems

$$\boxed{(A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0}$$

im Beispiel:

$\lambda_1 = 0.8$: $$\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - 0.8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y = 0$
x ist frei wählbar,
z.B. $x = a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_1 = 0.8$

$$EV^1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1.1$ $$\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - 1.1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -0.3x + 0.2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$y = \frac{3}{2} x$
z.B x ist frei wählbar $x = b$

$$\Rightarrow \quad EV^2 = \begin{pmatrix} b \\ \frac{3}{2} b \end{pmatrix}$$

d.h. gleichförmiges 10%iges Wachstum von Männern und Frauen ist nur bei Startverhältnis von 3 Frauen zu 2 Männern

Probe $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 160 + 60 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 330 \end{pmatrix} = 1.1 \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Determinanten: Vorüberlegung

Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \ldots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \ldots, a_n$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{1, \ldots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \ldots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \ldots, a_n$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{1, \ldots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$
- Damit: Folgende 6 Permutationen:

$$
\begin{array}{ll}
(1,2,3) & \text{ohne Inversion,} \\
(1,3,2),\ (2,1,3) & \text{mit je einer Inversion,} \\
(2,3,1),\ (3,1,2) & \text{mit je zwei Inversionen,} \\
(3,2,1) & \text{mit drei Inversionen.}
\end{array}
$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Definition Determinante

- Gegeben: A, eine $n \times n$-Matrix.
- Außerdem: $(1, \ldots, n)$ sei geordnetes n-Tupel der Zeilenindizes und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ mit $\nu(p)$ Inversionen.
- Determinante von A ist dann:

$$\det A = \sum_{p} (-1)^{\nu(p)} \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

Beispiele

- Gegeben: A als eine $n \times n$-Matrix
- Für $n = 1$ gilt dann $A = (a_{11})$ sowie $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}.$
- Für $n = 2$ enthält die Determinante $2! = 2$ Summanden,
- nämlich: $a_{11}a_{22}$ ohne Inversion und $-a_{12}a_{21}$ mit einer Inversion.
- Damit: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Determinanten von 3×3-Matrizen

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
   9.1. Matrizen und Vektoren
   9.2. Matrixalgebra
   9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
   9.4. Lineare Gleichungssysteme
   9.5. Inverse Matrizen
   9.6. Determinanten
   9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Beispiel: Determinante einer 3×3-Matrix

- Für $n = 3$: Determinante hat $3! = 6$ Summanden, nämlich
  $a_{11}a_{22}a_{33}$ ohne Inversion,
  $a_{12}a_{23}a_{31}$ und $a_{13}a_{21}a_{32}$ mit zwei Inversionen,
  $-a_{11}a_{23}a_{32}$ und $-a_{12}a_{21}a_{33}$ mit einer Inversion und
  $-a_{13}a_{22}a_{31}$ mit drei Inversionen.
- Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\det A = \quad & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
= \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
& -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

- Einfacher zu merken: Regel von Sarrus (siehe Vorl.)

Zahlenbeispiel Determinanten

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
- 9.1. Matrizen und Vektoren
- 9.2. Matrixalgebra
- 9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
- 9.4. Lineare Gleichungssysteme
- 9.5. Inverse Matrizen
- 9.6. Determinanten
- 9.7. Eigenwerte

10. Lineare Programme

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie: $\det A = -2$,
  $\det B = 6$,
  $\det C = 0$

Minor, Kofaktoren

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A mit $n \geqq 2$;
- Streiche Zeile i und Spalte j, $\Rightarrow$ Matrix mit $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- nach dem Streichen heißt diese Matrix Minor
- Damit kann man das algebraische Komplement oder den Kofaktor d_{ij} zur Komponente a_{ij} von A berechnen:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \begin{cases} \det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ gerade} \\ -\det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(i,j = 1,\dots,n)$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Entwicklungssatz von Laplace

- Entwicklungssatz für Determinanten
- Gegeben: A eine $n \times n$-Matrix und D die Matrix der Kofaktoren.
- Dann gilt für $n = 2, 3, \ldots$

$$AD^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

- Insbesondere wird mit:

$$\begin{aligned} \det A &= a_i^T d_i = a_{i1} d_{i1} + \ldots + a_{in} d_{in} \qquad (i=1,\ldots,n) \\ &= a^{jT} d^j = a_{1j} d_{1j} + \ldots + a_{nj} d_{nj} \qquad (j=1,\ldots,n) \end{aligned}$$

die Determinante von A nach der $i$ten Zeile $a_i^T = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ bzw. nach der j-ten Spalte $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ von A entwickelt.

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Beispiel: Entwicklungssatz

Beispiele

- Zeigen Sie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Sätze

Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz)
- aber: im allgemeinen $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
- $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert

Gilt zusätzlich $\det A \neq 0$

- Mit $D = (d_{ij})_{n,n}$, der Matrix der Kofaktoren zu A gilt
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- Ist A orthogonal gilt: $\det A = \pm 1$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Cramersche Regel

Lösung eindeutig bestimmter linearer Gleichungssysteme

- Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$
- Voraussetzung: Es existiert A^{-1}, also auch $\det A \neq 0$
- Bezeichnung: Mit A_j ist die Matrix, in der gegenüber A die j-te Spalte durch b ersetzt wird, also

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

- Dann lässt sich die Lösung x in folgender Form schreiben:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(Cramersche Regel)

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Beispiel Cramersche Regel

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Zu zeigen:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- und $Ax = b$
- Damit: $x^T = (1, -1, 1)$

Eigenwerte: Einführendes Beispiel

Bevölkerungsentwicklung

- Gegeben:

$$\begin{array}{ll} x_t > 0 & \text{die Anzahl von Männern im Zeitpunkt } t \text{ und} \\ y_t > 0 & \text{die Anzahl von Frauen im Zeitpunkt } t. \end{array}$$

- Anzahl der Sterbefälle für Männer bzw. Frauen im Zeitintervall $[t, t+1]$ sei proportional zum jeweiligen Bestand im Zeitpunkt t, und zwar $0{,}2x_t$ für die Männer und $0{,}2y_t$ für die Frauen.
- Anzahl der Knaben- und Mädchengeburten im Zeitintervall $[t, t+1]$ proportional ist zum Bestand der Frauen.
- Anzahl der Knabengeburten: $0{,}2y_t$,
- Anzahl der Mädchengeburten: $0{,}3y_t$.
- Für Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$ damit:

$$\begin{array}{rcrcr} x_{t+1} & = & x_t - 0{,}2x_t + 0{,}2y_t & = & 0{,}8x_t + 0{,}2y_t \\ y_{t+1} & = & y_t - 0{,}2y_t + 0{,}3y_t & = & 1{,}1y_t \end{array}$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Beispiel Bevölkerungsentwicklung

- Matriziell:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

- Forderung: Zeitliches Verhältnis von Männern und Frauen soll konstant bleiben
- Also:

$$x_{t+1} = \lambda x_t \iff y_{t+1} = \lambda y_t \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+),$$

- Dieser Fall beschreibt einen gleichförmigen Wachstums- ($\lambda > 1$) beziehungsweise Schrumpfungsprozess ($\lambda < 1$)
- Matriziell:

$$\lambda z = Az \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

- Lösung?

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Definition

David Hilbert
(1862 – 1943)

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A.
- Ist nun für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq o$
- lineare Gleichungssystem $Ax = \lambda x$ erfüllt, so heißt λ reeller Eigenwert zu A und
- x reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ.
- Insgesamt: Eigenwertproblem der Matrix A.

Damit

- $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = Ax - \lambda Ex = (A - \lambda E)x = o$
- Satz: Das LGS $Ax = \lambda x$ hat genau dann eine Lösung $x \neq o$, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- Jedes λ, das $\det(A - \lambda E) = 0$ löst ist ein Eigenwert von A.
- Anschließend: Für jedes erhaltene λ Lösen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)x = o \quad \text{mit} \quad x \neq o$$

- Damit hat man für jedes λ mindestens einen reellen Eigenvektor x.
- Satz: Mit $x \neq o$ ist auch jeder Vektor rx $(r \in \mathbb{R},\ r \neq 0)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}65 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$

  $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme

Sätze über Eigenwertprobleme

- Gegeben: A ist eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix
- Es gilt: Die Eigenwerte sind alle reell und nicht notwendigerweise verschieden und
- ist der Rang von A gleich $k \leqslant n$, so ist $\lambda = 0$ ein $(n-k)$-facher Eigenwert
- Zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existieren genau n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $x^1, \ldots, x^n$
- Diese Eigenvektoren kann man so wählen, dass $X = (x^1, \ldots, x^n)$ orthogonale Matrix wird, also $XX^T = E$
- Gegeben zusätzlich: $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A und $A^m = A \cdot \ldots \cdot A$ mit $m \in \mathbb{N}$
- Dann gilt: $L = X^T A X \quad$ und $\quad A = XLX^T$
- außerdem gilt: A^m besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte
10. Lineare Programme