Anmerkungen zur Vorlesung Statistik vom 22.11.2016

Inhalt:

Zufallsvorgänge und Wahrscheinlichkeit:

- Aufgabensammlung Aufgabe 44
- Darstellungsformen zu Wahrscheinlichkeiten:
  - n-Felder Tafel
    (Unabhängigkeit von Ereignissen)
  - Baumdiagramm
- Klausur SS2016: Aufgabe 3 (Wahrscheinlichkeiten, Ereignisse, …)

diskrete Zufallsvariablen:

- Einführung
- Binomialverteilung

Aufgabensammlung Statistik:

22.11.2016
Hausaufgabe
A43-49 ohne 44
A50, A52, A60

Aufgabe 3 **9 Punkte**

Zwei faire Würfel werden geworfen. Folgende Ereignisse werden definiert:

- A: Die Augensumme beider Würfel beträgt 3
- B: Die Augensumme beider Würfel beträgt 7
- C: Mindestens einer der beiden Würfel zeigt eine 1

a) Tragen Sie die folgenden gesuchten Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein. Geben Sie auch jeweils eine kurze Begründung oder Berechnung für das Ergebnis an.

Gesucht	Ergebnis	Begründung
$P(A)$		
$P(B)$		
$P(C)$		
$P(C \cap A)$		
$P(C \cup A)$		
$P(A\|C)$		
$P(C\|A)$		
$P\big((A \cup B)\|C\big)$		

b) Sind A und C unabhängig?

c) Sind B und C unabhängig?

allgemein:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

zum Satz von Bayes

Aufgabe 44 (Aufgabensammlung Statistik)

Ereignisse:

E := „Ei von Erna"

L := „Ei von Lisa"

M := „Ei von Moni"

A := „Ei ist Ausschuss \ zu klein"

Gegeben:

$\mathbb{P}(E) = 0{,}40 \quad \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(M) = 0{,}30$

$\mathbb{P}(A|E) = \mathbb{P}(A|L) = 0{,}03 \qquad \mathbb{P}(A|M) = 0{,}05$

a) $\mathbb{P}(L) \underset{\text{Angabe}}{=} 0{,}30$

b) $\mathbb{P}(A) =$ Satz von der tot. W^k

$= \mathbb{P}(A|E)\cdot\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|L)\cdot\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(A|M)\cdot\mathbb{P}(M) =$

$= 0{,}03\cdot 0{,}40 + 0{,}03\cdot 0{,}30 + 0{,}05\cdot 0{,}30$

$= 0{,}036 \mathrel{\hat{=}} 3{,}6\,\%$

c) $\mathbb{P}(L|A) =$ Satz von Bayes

$$= \frac{\mathbb{P}(A|L)\cdot\mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0{,}03\cdot 0{,}30}{0{,}036} = 0{,}25 \mathrel{\hat{=}} 25\,\%$$

Darstellungsformen

i) m-Feeder Tafel

Ausschuss? \ Henne?	E	L	M	Σ
A	0,012	0,009	0,015	0,036
$\bar{A}$	0,388	0,291	0,285	0,964
Σ	0,4	0,3	0,3	1

Einträge in der Tabelle entsprechen den Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen, d.h. den gem. W^k en:

$\mathbb{P}(A \cap E) = \mathbb{P}(A \mid E) \cdot \mathbb{P}(E) = 0{,}03 \cdot 0{,}4 = 0{,}012$

$\mathbb{P}(A \cap L) = \mathbb{P}(A \mid L) \cdot \mathbb{P}(L) = 0{,}03 \cdot 0{,}3 = 0{,}009$

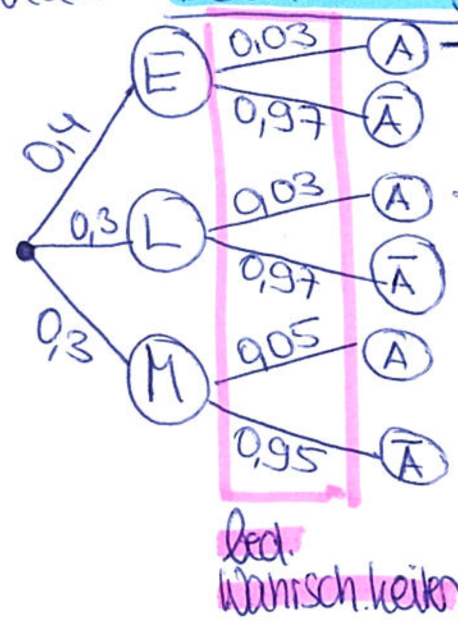
$\mathbb{P}(A \cap M) = \mathbb{P}(A \mid M) \cdot \mathbb{P}(M) = 0{,}05 \cdot 0{,}3 = 0{,}015$

$\boxed{\mathbb{P}(\bar{A} \cap E)} = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(A \cap E) = 0{,}4 - 0{,}012 = 0{,}388$

Anmerkung: m-Feeder-Tafel wird hauptsächlich verwendet, falls gem. Wk bereits gegeben sind.

Bei gegebenen bedingten Wk empfiehlt sich

ii) das Baumdiagramm



$\to \mathbb{P}(E \cap A) = 0{,}4 \cdot 0{,}03 = 0{,}012$

$\to \mathbb{P}(L \cap A) = 0{,}3 \cdot 0{,}03 = 0{,}009$

$\to \mathbb{P}(M \cap A) = 0{,}3 \cdot 0{,}05 = 0{,}015$

$\Sigma = \mathbb{P}(A)$

totale Wahrsch.keit

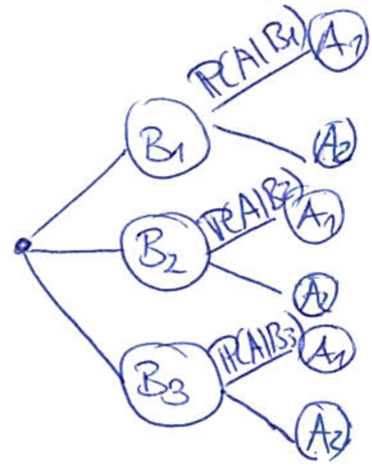
bed. Wahrsch.keiten

gemeinsame Wahrsch.keiten

Unabhängigkeit von Merkmalen \ Ereignissen

Sind die Merkmale A := „Ausschuss" und B := „legende Henne" unabhängig?

	B_1 (E)	B_2 (L)	B_3 (H)	
A_1 (A)	$\mathbb{P}(A \cap B_1)$			$\mathbb{P}(A)$
A_2 ($\bar{A}$)				
	$\mathbb{P}(B_1)$			



A und B heißen unabhängig, wenn gilt:

i) $\mathbb{P}(A \cap B_1) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_1)$ ...

allgemein: $\boxed{\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j) \ \forall i, j}$

ii) $\mathbb{P}(A_1 | B_1) = \mathbb{P}(A_1 | B_2) = \mathbb{P}(A_1 | B_3) = \mathbb{P}(A_1)$

allgemein: $\boxed{\mathbb{P}(A_i | B_j) = \mathbb{P}(A_i) \ \forall j}$

$\boxed{\mathbb{P}(B_j | A_i) = \mathbb{P}(B_j) \ \forall i}$

iii) Für zwei Ereignisse A und B gilt allgemein
A und B heißen unabhängig falls

$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$ bzw.

$\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$

Beispiel: 2-facher Würfelwurf

A: Augensumme = 4 $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

B: Erste Zahl = 2 $\{(2,1), (2,2), \ldots, (2,6)\}$

es gilt: $|A| = 3$, $|B| = 6$, $|\Omega| = 6^2 = 36$

$A \cap B = \{(2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{1/36 = \mathbb{P}(A \cap B)}{6/36 = \mathbb{P}(B)} = 1/6 \neq 3/36 = \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)$

Beispiel (Zufallsvariable):

Gegebenheiten:

2-facher Würfelwurf

Einsatz: 1 €

„Auszahlung" je nach Ausgang des Zufallsvorgangs:

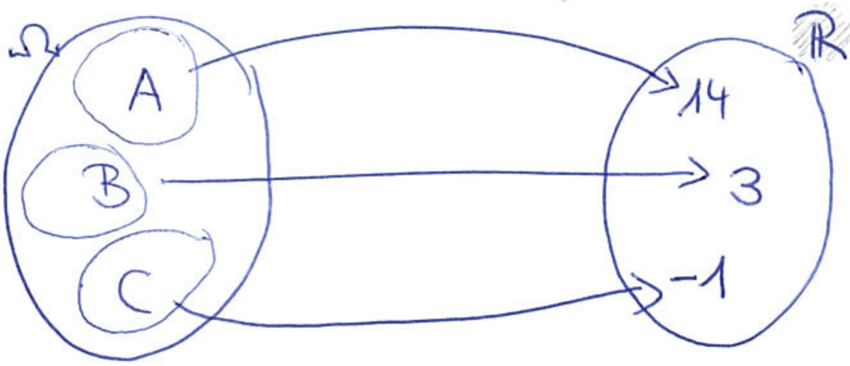
falls $A = \{(1,1)\}$ $\Rightarrow$ Auszahlung 15 €

falls $B = \{(2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\}$ $\Rightarrow$ Auszahlung 4 €

falls $C = \Omega \setminus (A \cup B)$ (d.h. sonst) $\Rightarrow$ Keine Auszahlung

Zufallsvariable:

$X :=$ „Gewinn-/Verlusthöhe beim Glücksspiel"



$X(\omega \in A) = 14$

$X(\omega \in B) = 3$

$X(\omega \in C) = -1$

Realisationen

damit: $X(\Omega) = \{-1, 3, 14\}$

Wertebereich der Zufallsvariablen X

Wahrscheinlichkeitsfunktion: also: $\boxed{f(x) = P(X = x)}$

$f: \mathbb{R} \to [0; 1]$

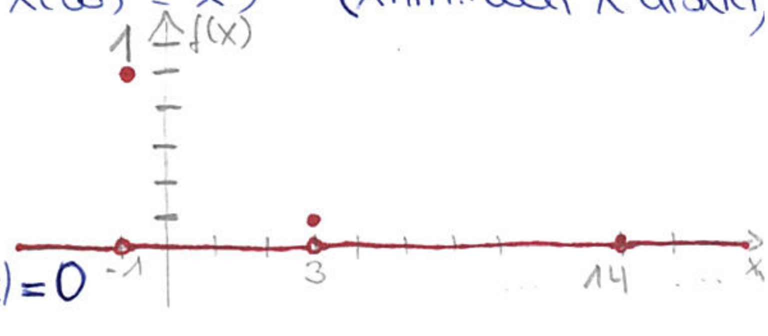
mit $x \to P(\omega$ mit $X(\omega) = x)$ (Anm.: weil X diskret)

hier: $f(14) = P(A) = \frac{1}{36}$

$f(3) = P(B) = \frac{5}{36}$

$f(-1) = P(C) = \frac{30}{36}$

für alle anderen x gilt: $f(x) = 0$



Verteilungsfunktion:

$F: \mathbb{R} \to [0;1]$

mit $x \to \mathbb{P}(X \le x)$

also: $\boxed{F(x) = P(X \le x)}$

hier:

$F(14) = P(X \le 14) = 1$

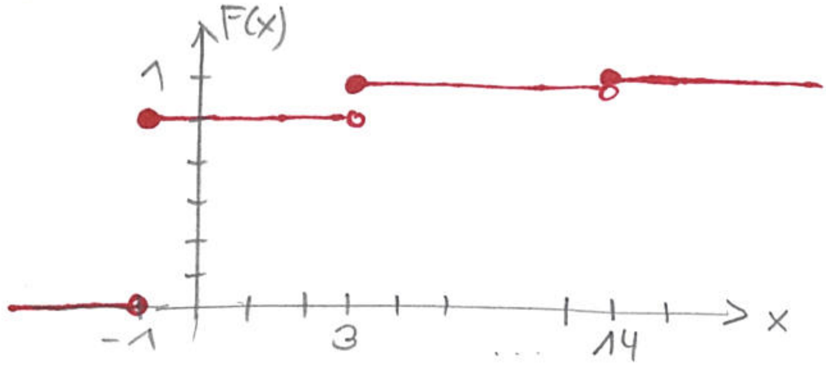
$F(3) = P(X \le 3) = \frac{30}{36} + \frac{5}{36} = \frac{35}{36}$

$F(-1) = P(X \le -1) = \frac{30}{36}$

falls $x < -1$: $\mathbb{P}(X \le x) = 0$

Allgemeiner:

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < -1 \\ 30/36 & \text{falls } -1 \le x < 3 \\ 35/36 & \text{falls } 3 \le x < 14 \\ 1 & \text{falls } x \ge 14 \end{cases}$$



Zufallsvariablen

Zufallsvariablen und Verteilungen

- Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen
- Formal: Zufallsvariable ist Abbildung von ~~Ereignisraum~~ Ergebnismenge in reelle Zahlen:

$$X:\ \Omega \to \mathbb{R}$$

- **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Realisation: $x = X(\omega)$

- **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Wertebereich: $X(\Omega) = \{x:\ x = X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$

- **Beispiel:** Würfeln, X: Augenzahl, $X(\Omega) = \{1,2,\ldots,6\}$, $x = 4$ (z.B.)

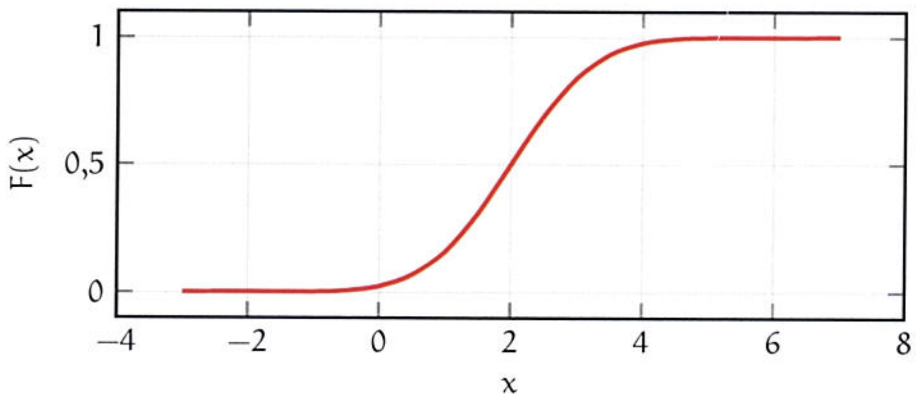
$$\underbrace{P(X = 4) = \tfrac{1}{6}}_{\text{⇝ führt zu: Wahrscheinlichkeitsfunktion}}, \quad \underbrace{P(X \leqq 3) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}}_{\text{⇝ führt zu: Verteilungsfunktion}}$$

Beispiel Zufallsvariable !

Verteilungsfunktion

- Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten zu Realisationen
- Formal: $$F(x) = P(X \leqq x)$$
- Eigenschaften der Verteilungsfunktion:
  - $F(x) \in [0;1]$
  - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$ mit $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$
  - monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqq F(x_2)$
  - Es gilt:

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$$



Beispiel einer Verteilungsfunktion

Binomialverteilung

ersetzt durch Urnenbeispiel mit 5 roten und 15 weißen Kugeln im Rahmen der VL (p=5/20=0.25)
X:="Anzahl der gezogenen roten Kugel bei 10-maligem Ziehen mit Zurücklegen";
-> X~B(10;0.25)

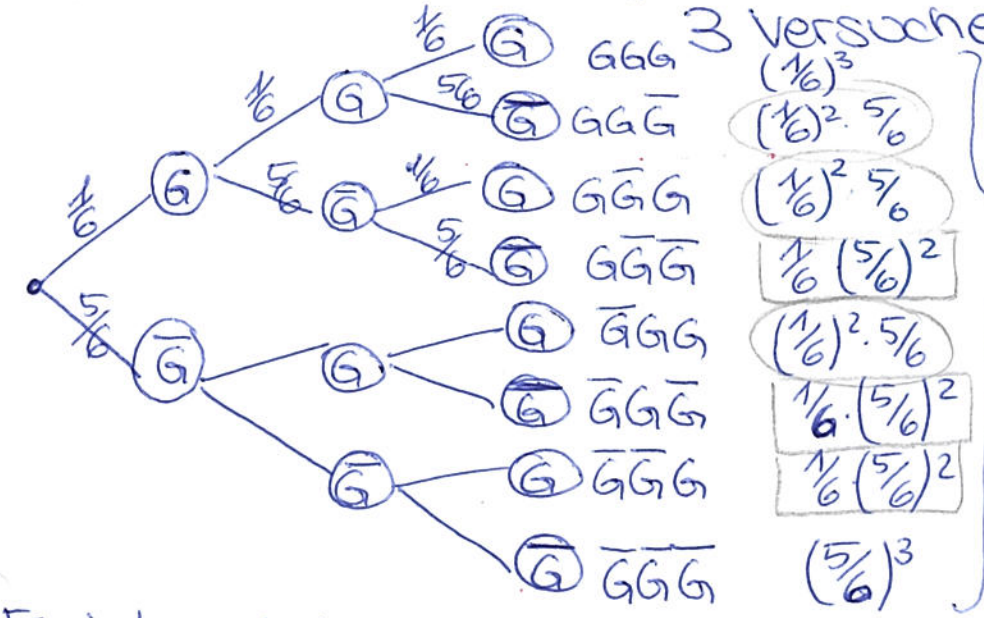
Einführungsbeispiel:

Es wird nun nicht mehr die Gewinnhöhe betrachtet, sondern nur zwischen den Zuständen Gewinn und Nicht-Gewinn ($\hat{=}$ Verlust) unterschieden

Ereignisse: $G = \{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$ mit $P(G) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\overline{G} = \Omega \setminus G \longrightarrow P(\overline{G}) = 1 - P(G) = \frac{5}{6}$

Nun:
Zufallsvorgang soll 3 mal wiederholt werden
Zufallsvariable $X :=$ „Anzahl der Gewinne bei 3 Versuchen"



zugeh. Wahrscheinlichkeiten zu geordneten Ausgängen.

Es interessiert nur noch:

x	0	$\boxed{1}$	2	3
$f(x)=P(X=x)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$
	$\simeq 0.5787$	$\simeq 0.3472$	$\simeq 0.0694$	$\simeq 0.0046$
	$\left[\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3\right.$	$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$\left.\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0\right]$

Verallgemeinerung auf 10 Versuche mit Einzelgewinnwahrscheinlichkeit $p = 1/6$:

$$f(2) = P(X=2) = P\big(\underset{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ 10.}{(G,G,\overline{G},\overline{G},\overline{G},\overline{G},\overline{G},\overline{G},\overline{G},\overline{G})},\ \underset{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \dots\ 10.}{(G,\overline{G},G,\overline{G},\dots\overline{G})},\ \dots,\ \underset{1\ \dots\ 8.\ 9.\ 10.}{(\overline{G},\dots,\overline{G},G,G)}\big) =$$

$$= \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \simeq 0.2907$$

Allgemein: Tabellarisch!

X = „Anzahl der Treffer beim n-maligen Durchführen eines Treffer/Niete-Experiments mit (konstanter) Einzeltrefferwahrscheinlichkeit p"

Dann ist: $X \sim B(n;p)$

Sprich: X ist binomialverteilt mit Parametern n und p.

n = Versuche/Wiederholungen, p = Trefferwahrscheinlichkeit

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X \sim B(n;p)$ gilt:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & \text{falls } x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

R $f(x)$ = dbinom(x, size, prob)

Die Verteilungsfunktion von $X \sim B(n;p)$ ist tabelliert → Folie 208 - 215

R $F(x)$ = pbinom(x, size, prob) $= P(X \leq x)$

Beispiel: $Y \sim B(\overset{n}{25}; \overset{p}{0.25})$

Gesucht: $\underset{=P(X=5)}{f(5)}$, $\underset{=P(X\leq 5)}{F(5)}$

⇒ Verteilungstabelle Folie 213 für $n=25$

$F(5) = 0.3783$ R pbinom(5, 25, 0.25)

$f(5) = F(5) - F(4) = 0.3783 - 0.2137 = 0.1646$

oder: $f(5) = \binom{25}{5} \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^{20} \approx 0.1645$ R dbinom(5, 25, 0.25)

Diskrete Zufallsvariablen

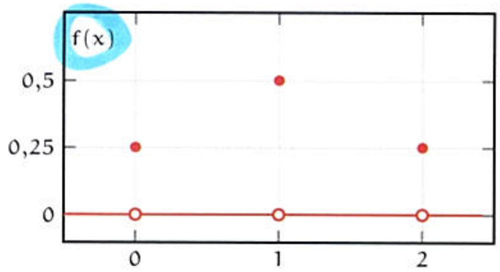
- X heißt diskret, wenn $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ endlich ist.
- Wahrscheinlichkeitsfunktion dann:

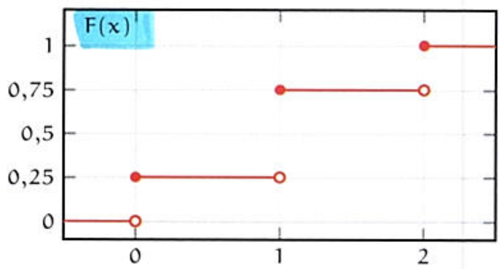
$$f(x) = P(X = x)$$

Beispiel: Münze 2 mal werfen; X: Anzahl "'Kopf"'

	(Z,Z)	(Z,K), (K,Z)	(K,K)
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{falls } 1 \leqq x < 2 \\ 1, & \text{falls } \quad x \geqq 2 \end{cases}$$





Binomialverteilung

- **Wiederholter** Zufallsvorgang
- n Durchführungen (jeweils unabhängig)
- Pro Durchführung: A oder $\bar{A}$ mit $P(A) = p$ ($\hat{=}$ Ziehen mit Zurücklegen)
- Schreibe:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$

- Dann gibt

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

an, wie oft A eintritt.
- Gesucht: Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

Binomialverteilung

- Herleitung:
  1) $P(X_i = 1) = P(A) = p, \; P(X_i = 0) = P(\bar{A}) = 1 - p$
  2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$ entspricht "'x mal Ereignis A und $n - x$ mal $\bar{A}$"'
     Wahrscheinlichkeit (bei Unabhängigkeit): $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
  3) Aber: Reihenfolge irrelevant! Anzahl Anordnungen: $\binom{n}{x}$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, & \text{falls } x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kurzschreibweise: $X \sim B(n; p)$
  X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
- Tabellen zeigen meist $F(x)$
- für $f(x)$ gilt: $f(x) = F(x) - F(x-1)$

$X \sim B(n, 0.25)$, Tabelle der Binomialverteilung $F(x) = P(X \leqslant x)$

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.7500	0.5625	0.4219	0.3164	0.2373	0.1780	0.1335	0.1001	0.0751	0.0563	0.0422	0.0317	0.0238	0.0178	0.0134
1	1.0000	0.9375	0.8438	0.7383	0.6328	0.5339	0.4450	0.3671	0.3003	0.2440	0.1971	0.1584	0.1267	0.1010	0.0802
2		1.0000	0.9844	0.9492	0.8965	0.8306	0.7564	0.6786	0.6007	0.5256	0.4552	0.3907	0.3326	0.2811	0.2361
3			1.0000	0.9961	0.9844	0.9624	0.9295	0.8862	0.8343	0.7759	0.7133	0.6488	0.5843	0.5213	0.4613
4				1.0000	0.9990	0.9954	0.9871	0.9727	0.9511	0.9219	0.8854	0.8424	0.7940	0.7415	0.6865
5					1.0000	0.9998	0.9987	0.9958	0.9900	0.9803	0.9657	0.9456	0.9198	0.8883	0.8516
6						1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9965	0.9924	0.9858	0.9757	0.9617	0.9434
7							1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9827
8								1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9979	0.9958
9									1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
10										1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
11											1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.0100	0.0075	0.0056	0.0042	0.0032	0.0024	0.0018	0.0013	0.0010	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002
1	0.0635	0.0501	0.0395	0.0310	0.0243	0.0190	0.0149	0.0116	0.0090	0.0070	0.0055	0.0042	0.0033	0.0025	0.0020
2	0.1971	0.1637	0.1353	0.1114	0.0913	0.0745	0.0607	0.0492	0.0398	0.0321	0.0258	0.0208	0.0166	0.0133	0.0106
3	0.4050	0.3530	0.3057	0.2631	0.2252	0.1917	0.1624	0.1370	0.1150	0.0962	0.0802	0.0666	0.0551	0.0455	0.0375
4	0.6302	0.5739	0.5187	0.4654	0.4149	0.3674	0.3235	0.2832	0.2467	0.2138	0.1844	0.1583	0.1354	0.1153	0.0979
5	0.8104	0.7653	0.7175	0.6678	0.6172	0.5666	0.5168	0.4685	0.4222	0.3783	0.3372	0.2990	0.2638	0.2317	0.2026
6	0.9205	0.8929	0.8610	0.8251	0.7858	0.7436	0.6994	0.6537	0.6074	0.5611	0.5154	0.4708	0.4279	0.3869	0.3481
7	0.9729	0.9598	0.9431	0.9226	0.8982	0.8701	0.8385	0.8037	0.7662	0.7265	0.6852	0.6427	0.5998	0.5568	0.5143
8	0.9925	0.9876	0.9807	0.9713	0.9591	0.9439	0.9254	0.9037	0.8787	0.8506	0.8196	0.7860	0.7502	0.7126	0.6736
9	0.9984	0.9969	0.9946	0.9911	0.9861	0.9794	0.9705	0.9592	0.9453	0.9287	0.9092	0.8868	0.8616	0.8337	0.8034
10	0.9997	0.9994	0.9988	0.9977	0.9961	0.9936	0.9900	0.9852	0.9787	0.9703	0.9599	0.9472	0.9321	0.9145	0.8943
11	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9991	0.9983	0.9971	0.9954	0.9928	0.9893	0.9845	0.9784	0.9706	0.9610	0.9494
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9979	0.9966	0.9948	0.9922	0.9888	0.9842	0.9784
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9944	0.9918
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
17		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Diskrete Zufallsvariablen/Verteilungen:

	Wahrscheinlichkeits-funktion $f(x) = P(X = x)$ $= F(x) - F(x-1)$	Verteilungs-funktion $F(x) = P(X \leq x)$	Approximation/ Beispiel
Binomial-verteilung **$B(n; p)$**	$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, falls $x \in \{0,1,\dots,n\}$ x: Treffer n: Versuche p: Trefferw'keit	***tabelliert*** F. 208-215	- Zufallsvariable: X := „Anzahl der Treffer beim n-maligen Durchführen eines Treffer/Niete Experiments mit konstanter Einzeltreffer wahrscheinlichkeit p"
	R dbinom(x, size=n, prob=p)	R pbinom(q=x, size=n, prob=p)	Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte mit Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau/höchstens 2-mal (x) Herz zu ziehen?
Hypergeo-metrische Verteilung Hyp(N;M;n)	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, falls x möglich x: Treffer n: Versuche N: Gesamtanzahl M: Anzahl „Markierte"	/	Ist $n \leq \frac{N}{20}$, so gilt: $Hyp(N;M;n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n;p)$
	R dhyper(x, m=M, n=N-M, k=n) x: Treffer k: Versuche m: Anz. „Markierte" n: Anz. „Nichtmarkierte"	R phyper(q=x, m=M, n=N-M, k=n)	Aus einem 32-Kartenblatt (N) wird 3-mal (n) eine Karte ohne Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau/höchstens 2-mal (x) Herz zu ziehen? (M=32/4=8)
Poisson-verteilung **$P(\lambda)$**	$\frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$, falls $x = 0,1,2,\dots$ x: Treffer λ: Parameter λ	***tabelliert*** F. 216/217	p klein ($\leq 0{,}1$), n groß (≥ 50) und $np \leq 10$. $Hyp(N;M;n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n;p)$ $B(n;p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)$
	R dpois(x, lambda=λ)	R ppois(q=x, lambda=λ)	„Verteilung der seltenen Ereignisse", z.B. Anzahl (genau/höchstens) der 6-er pro Lottoausspielung