Statistik

für Betriebswirtschaft, Internationales Management, Wirtschaftsinformatik und Informatik

Sommersemester 2017

HSA Statistik SS 2017 Sessionlist		
Datum	Statistik für BW/IM/I/Winf	Nr.
15.03.2017	Einführung Statistik	1
22.03.2017	Differentialrechnung, 2-dim Diff.Rechnung	2
29.03.2017	univ. deskr. Stat., Quantile, Plots	3
05.04.2017	Streuung, Konzentrationsmaße	4
12.04.2017	Kontingenztabellen, Mosaikplots, Korrelation	5
19.04.2017	Preisindizes, lineare Regression	6
26.04.2017	Wahrscheinlichkeitsbegriff	7
03.05.2017	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes	8
10.05.2017	diskrete Zufallsvariablen	9
17.05.2017	Stetige ZV, Gleichverteilung	10
24.05.2017	Pyramid	
31.05.2017	Normalverteilung, Verteilungsparameter	11
07.06.2017	Schätzfunktionen und Punktschätzer	12
14.06.2017	Konfidenzintervalle	13
21.06.2017	Wiederholung, Besprechung Probeklausur	14
28.06.2017	Prüfungswoche	15

Stefan Etschberger

Gliederung

2 Differenzieren 2

- Partielle Ableitung
- Kurvendiskussion
- Optimierung mit Nebenbedingungen

Partielle Differenzierbarkeit

Betrachtet werden

- Funktionen $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \in \mathbb{R}^n$
- mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = z$
- außerdem: i-ter Einheitsvektor $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$
- und: $x + h \cdot e_i \in D$ mit $h > 0$

Definition

- f heißt im Punkt x partiell differenzierbar bei Existenz des Genzwerts:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h}$$

- In diesem Fall heißt dieser Grenzwert $f_{x_i}(x)$ die erste partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt x. Schreibweisen:

$$f^i(x) = f_{x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Partielle Ableitung: Idee: Bestimme Steigung in Richtung der Koordinatenachsen, dazu: Betrachte eine Variable und setze alle anderen Variablen konstant

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = f_{x_i}$$

„partielle Ableitung nach x_i"

Achtung: Bei Funktionen mehrerer Variablen gibt es kein f'! Nie!

Beispiel: ▸ $f(x,y) = x^2 - 2x^3 y + 3y$

$7^2 - 2\cdot 7^3 \cdot y + 3y$

$x^2 - 2x^3 \cdot 11 + 3 \cdot 11$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 6x^2 \cdot y$$

$2x - 6x^2 \cdot 11 + 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\cdot x^3 + 3$$

$0 - 2\cdot 7^3 + 3$

▸ $f(x,y) = x \cdot e^{-x^2-y^2}$

$(g(x)\cdot h(x))' = g' \cdot h + g \cdot h'$

partielle Ableitungen:

nach x

$$f_x = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + x \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2-y^2} \cdot (1 - 2x^2)$$

$$f_y = x \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = -2xy \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$, $f_x = e^{-x^2-y^2}\cdot(1-2x^2)$
$f_y = e^{-x^2-y^2}\cdot(-2xy)$

$f_x(0.4, 0.55) \approx 0.428$
$f_y(0.4, 0.55) \approx -0.277$

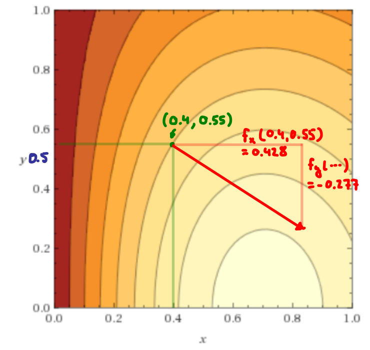
Gradient ≙ Vektor der partiellen Ableitungen

Nabla-Operator

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

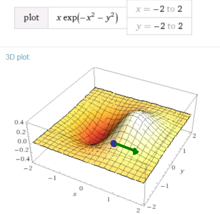
Beispiel: $f(x,y) = x\cdot e^{-x^2-y^2}$

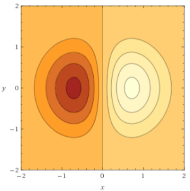
$$\Rightarrow \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}\cdot(1-2x^2) \\ e^{-x^2-y^2}\cdot(-2xy) \end{pmatrix}$$



Eigenschaften des Gradienten:

- ∇f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f
- 90° von ∇f „weggedreht“: Richtung einer Höhenlinie
- $-\nabla f$: in Richtung des stärksten Abfalls von f
- (x,y) ist Extremwert von f $\Rightarrow$ $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$





2. partielle Ableitungen und Hessematrix

Beispiel: $f(x,y) = x^3 + x^2 y - 2xy^2$

$f \xrightarrow{\text{nach } x \text{ ableiten}} f_x = 3x^2 + 2x \cdot y - 2 \cdot y^2$

- nach x ableiten: $6x + 2 \cdot y = f_{xx}$
- nach y: $2x - 4y = f_{xy}$

$f \xrightarrow{\text{nach } y \text{ ableiten}} f_y = x^2 - 4xy$

- nach x: $2x - 4y = f_{yx}$
- nach y: $-4x = f_{yy}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

2. partiellen Ableitungen von f

Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz

Bei „fast allen" Funktionen $f(x,y)$ gilt:

$f_{xy} = f_{yx}$

Rezept zur Extremwertbestimmung von $f(x,y)$

① Setze $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$

sind Kandidaten für Extremwerte

② Bestimme $H_f(x,y)$ und setze Kandidaten jeweils ein, z.B.

$$H_f(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

③ $ad - bc > 0$ und $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ a < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \end{cases}$

$ad - bc < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$ad - bc = 0 \Rightarrow$ (für uns) keine Aussage möglich

Beispiel (Extremwert von $f(x,y)$)

$$f(x,y) = -x^4 + 2x^2 + y^2$$

ges: Extrema

① $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3 + 4x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $y = 0$ und $-4x(x^2-1) = 0$

$y = 0$ und $x = 0, -1, +1$

$\Leftrightarrow$ 3 Kandidaten

$(0,0)$, $(-1,0)$, $(+1,0)$

② $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2+4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

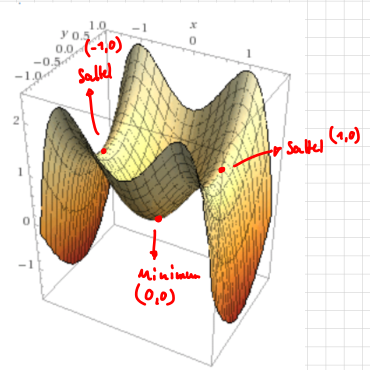
③ Einsetzen der Kandidaten in H_f

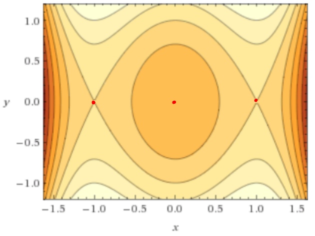
$H_f(0,0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} c & d \end{array} \end{array} \Rightarrow \overset{ad-bc}{4 \cdot 2 - 0 \cdot 0} = 8 > 0$ und $\overset{a}{4} > 0$

$\Rightarrow$ Minimum bei $(0,0)$

$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -8 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = -16 < 0 \Rightarrow$ Sattel bei $(-1,0)$

$H_f(+1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow$ Sattel bei $(+1,0)$





Beispiel: Suche Extrema von $f(x,y) = 8x^2 + y^4 - 16xy$

① $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x - 16y \\ 4y^3 - 16x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \quad x = y \; (\mathrm{I}) \quad \text{und} \quad 4y^3 - 16y = 0 \; (\mathrm{II})$ (I in II eingesetzt)

$\Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{und} \quad 4y(y^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{und} \quad y = 0, -2, 2$

$\Rightarrow$ Kandidaten: $(-2,-2)$, $(0,0)$, $(2,2)$

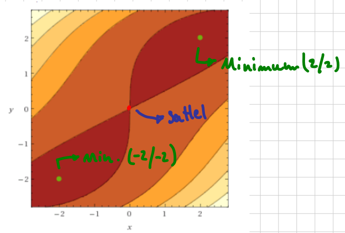
② $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 12y^2 \end{pmatrix}$

③ $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 16 \cdot 0 - (-16) \cdot (-16) < 0$

$\Rightarrow$ Sattel bei $(0,0)$

$H_f(\underset{+2}{-2}, \underset{+2}{-2}) = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow 16 \cdot 48 - (-16) \cdot (-16) > 0$

$16 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $(\underset{+2}{-2}, \underset{+2}{-2})$



Partielle Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit auf $D_1 \subseteq D$

- Die Funktion $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- heißt in $D_1 \subseteq D$ partiell differenzierbar
- wenn f für alle $x \in D_1$ partiell differenzierbar ist

Gradient

- Ist die Funktion $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x
- nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar, dann heißt

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Gradient von f im Punkt $x \in D$

Tangentialhyperebenen

Tangentialebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialebene:
  $T(x_1, x_2) = f(x) + \frac{\partial f}{x_1}(\tilde{x}) \cdot (x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{\partial f}{x_2}(\tilde{x}) \cdot (x_2 - \tilde{x}_2)$

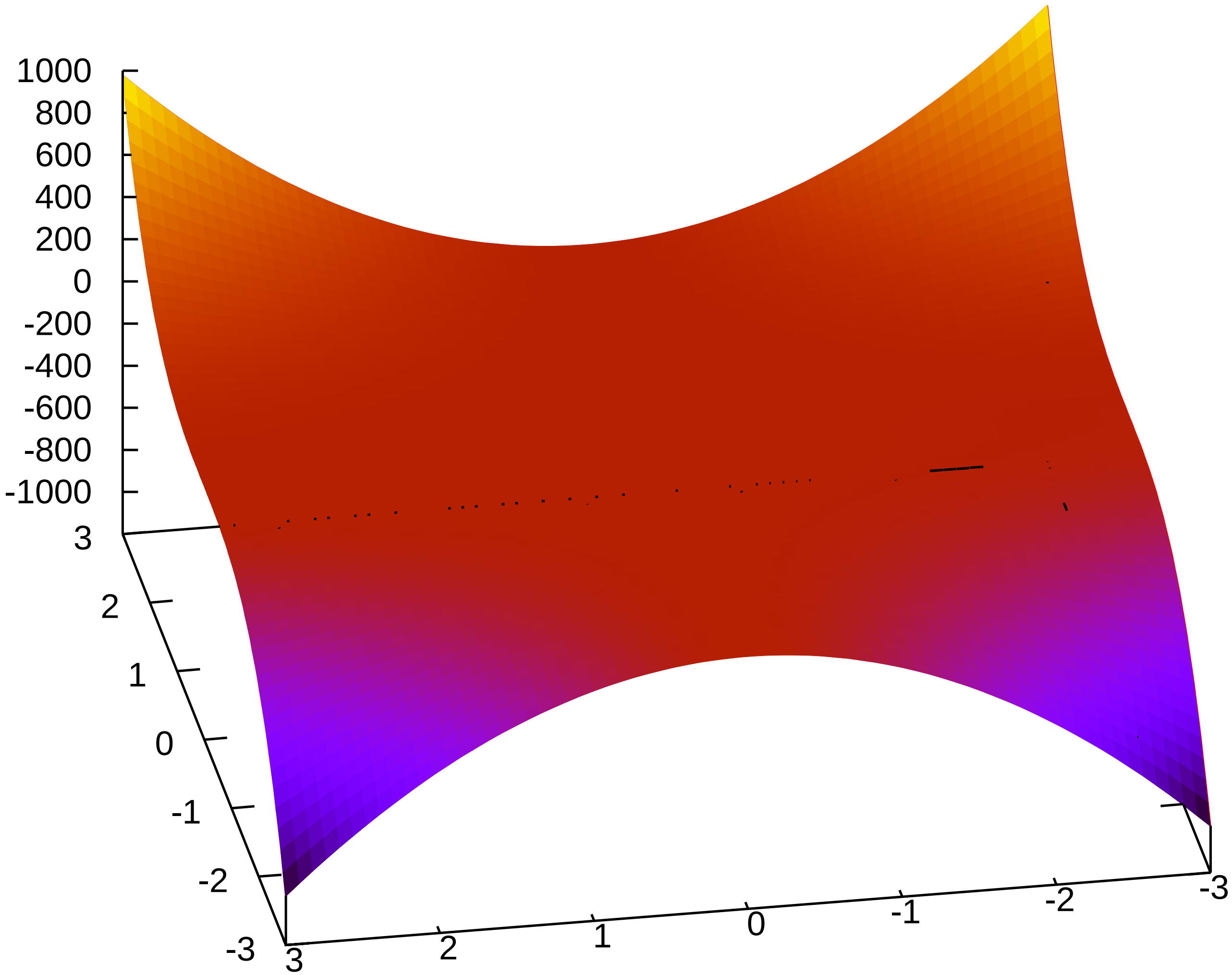
Tangentialhyperebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x}$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialhyperebene:

$$H(x) = f(\tilde{x}) + \left(\nabla f(\tilde{x})\right)^T \cdot (x - \tilde{x})$$

Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$
- Gesucht: Tangentialebene im Punkt $(1, -2, f(1, -2))$

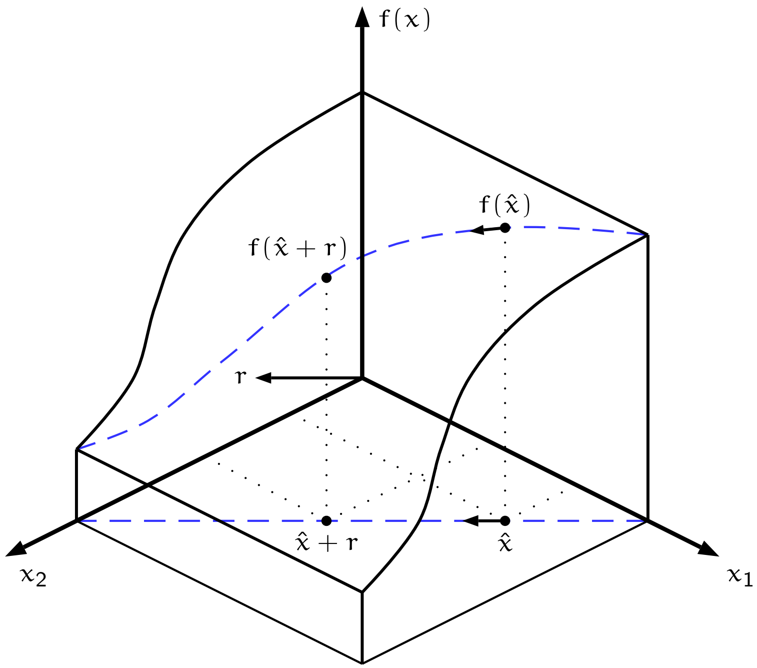


Richtungsableitungen

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $x \in D$
- mit stetig partiellen Ableitungen in D und
- ein Punkt $x \in D$
- und ein Richtungsvektor $r \in D$ mit $\|r\| = 1$.
- Außerdem: Es existiert sowohl ein $\epsilon > 0$ mit $[x - \epsilon r; x + \epsilon r] \in D$
- als auch der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot r) - f(x)}{t}$$



Richtungsableitung

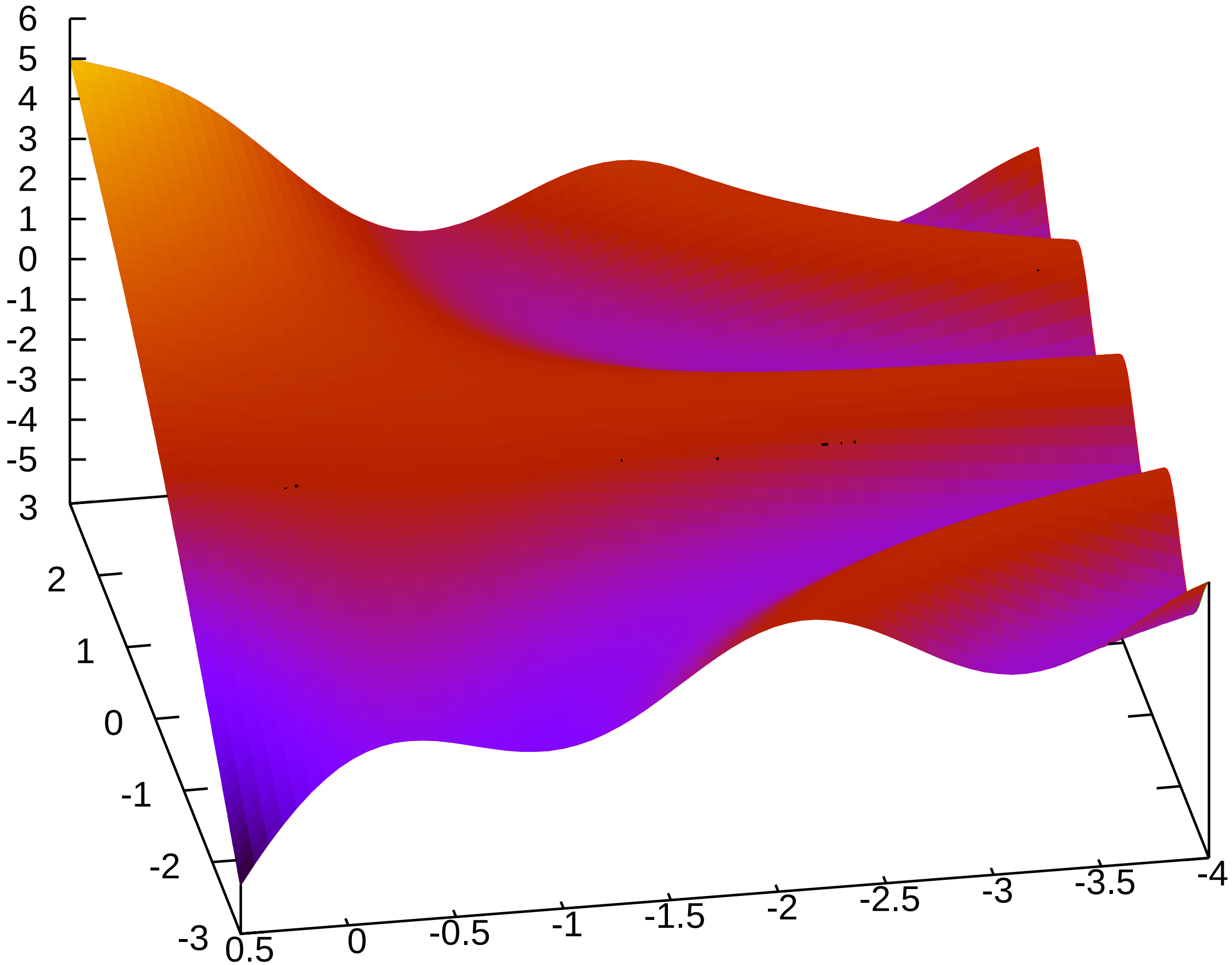
- Dann heißt

$$\left(\nabla f(x)\right)^T \cdot r$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung r

Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x\,e^y + \cos(xy)$
- Gesucht: Ableitung im Punkt $(2,0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$



Höhere partielle Ableitungen

Voraussetzungen

- Funktion $f: \ D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- in D nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar,
- auch partiell differenzierbar: alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$.

Dann heißt

- f zweimal partiell nach allen Variablen differenzierbar.
- Partielle Ableitungen zweiter Ordnung für $i, j = 1, \ldots, n$:

$$f^{ij}(x) = f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Achtung: Zuerst nach x_i, dann nach x_j differenzieren

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig partiell differenzierbar in D
- 2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

- mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Dann gilt für alle $x \in D$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\, \partial x_i}}$$

Hermann Schwarz (1843-1921)

Gegeben

- Zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$

Definition

- Die symmetrische Matrix

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

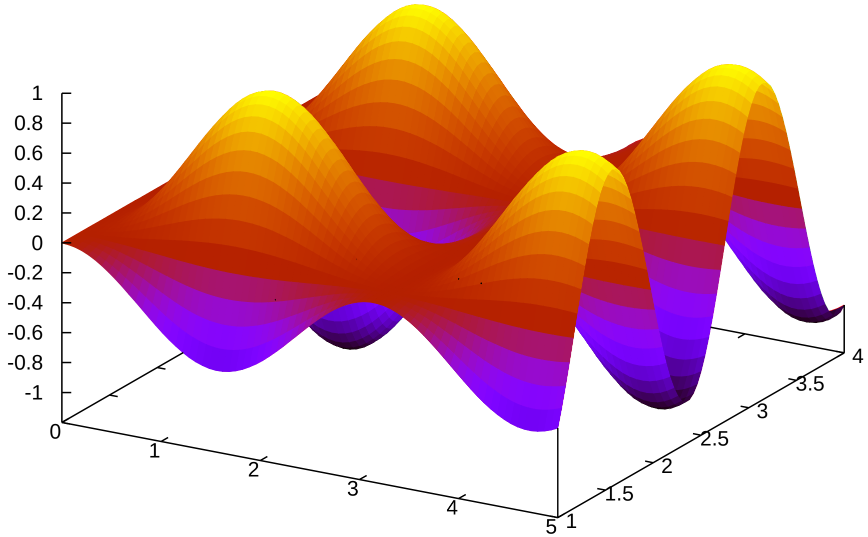
heißt Hessematrix

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

- Gegeben: Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar
- f hat im Punkt $\tilde{x}$ ein lokales Minimum oder Maximum
- Dann gilt: $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Beispiel

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x, y) = \sin^2(x) \cdot \cos(4y)$



Am Punkt $\tilde{x}$ heißt die Hessematrix $H_f(\tilde{x})$

- positiv definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x > 0$,
- positiv semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \geqslant 0$,
- negativ definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x < 0$,
- negativ semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \leqslant 0$
- jeweils für alle x gilt.
- Andernfalls heißt $H_f(\tilde{x})$ indefinit.

Einfache Kriterien zu Definitheitseigenschaften

Hauptunterdeterminanten

- Gegeben: Symmetrische $n \times n$-Matrix A
- Dann heißt

$$\det H_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

die i-te Hauptunterdeterminante $(i = 1, \ldots, n)$ von A.

Satz

- Matrix A positiv definit $\Leftrightarrow \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv
- Matrix A negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^i \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind negativ

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Voraussetzungen

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar
- Es gibt ein $\tilde{x}$, für das $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Satz

- $H_f(\tilde{x})$ ist negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokale Maximalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokale Minimalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist indefinit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist keine lokale Extremalstelle von f

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist einziges globales Minimum von f
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von f

Voraussetzungen

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar

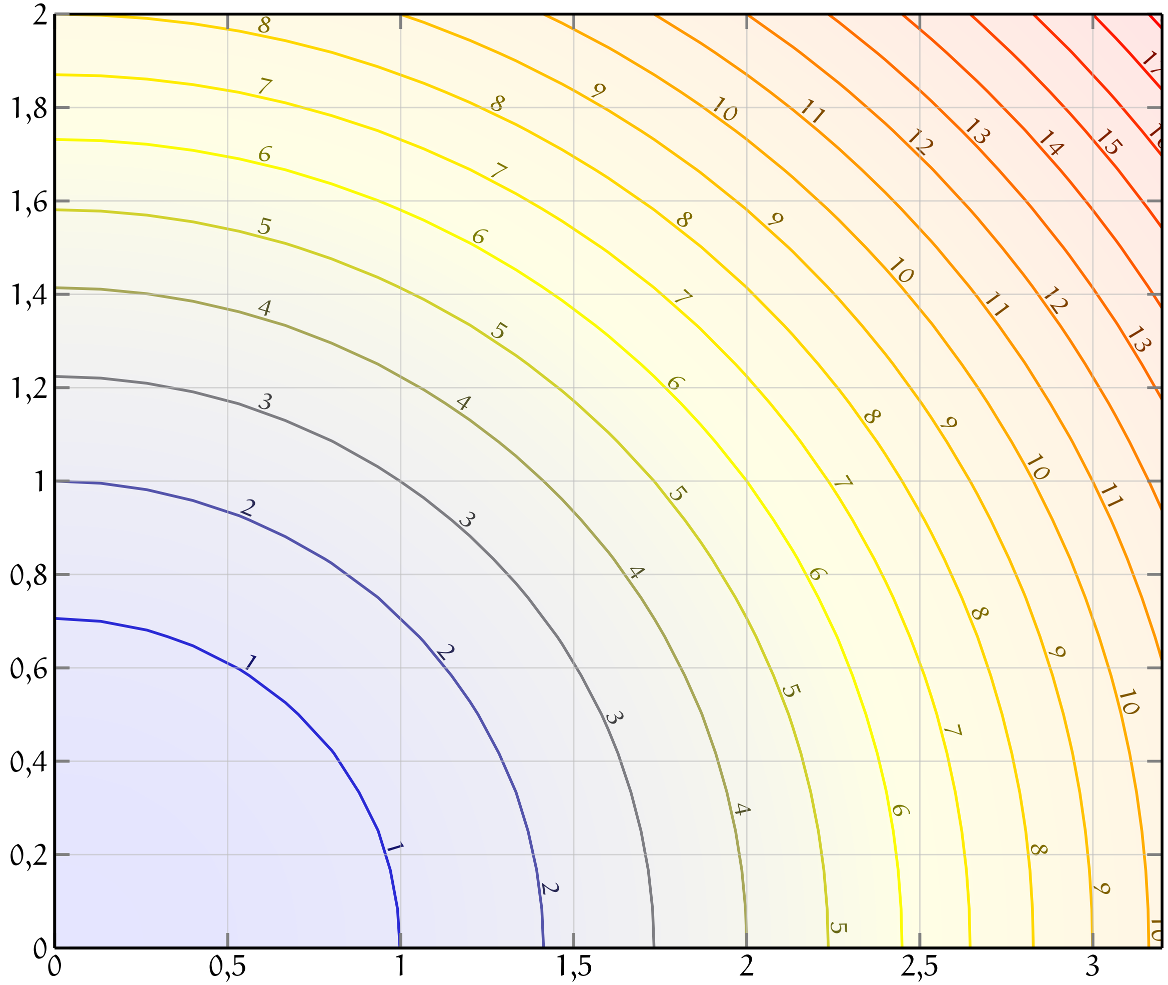
Satz

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist streng konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist streng konkav in D

- $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ semidefinit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist konkav in D

Problem

- Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
- Gesucht: Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit kleinstem Wert von f
- auf der Geraden $2y + x - 3 = 0$



Aufgabe

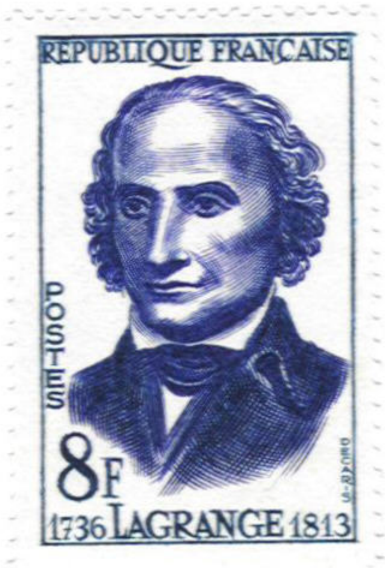
- Maximiere (oder minimiere) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- in Abhängigkeit von $x = (x_1, \ldots, x_n)$,
- so dass die Nebenbedingungen $g^i(x) = 0$ mit $g^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $i = 1, \ldots, m$ erfüllt sind
- Kurz:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \text{max} \quad (\text{min}) \\ \text{NB:} \quad & g^1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g^m(x) = 0 \end{aligned}$$

Der Ansatz von Lagrange

Idee von Lagrange

- Gut wäre: Transformation des Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen in eines ohne NB.
- Im Optimum: Gradient der zu optimierenden Funktion und Gradient der NB sind parallel



Lagrangefunktion

- Gegeben: Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max(\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Dazu wird definiert: Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)$$

Satz von Lagrange

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Hessematrix der Lagrangefunktion:

$$\hat{H}_L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Eine Lösung $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ des Systems $\nabla L(x,\lambda) = 0$

Dann gilt:

- $\hat{H}_L(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Minimum von (O)
- $\hat{H}_L(x,\tilde{\lambda})$ negativ definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(x,\tilde{\lambda})$ positiv definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Minimum von (O)

Variable Lagrange Multiplikatoren

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Lagrangefunktion

$$\hat{L}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(x) g^j(x)$$

Dann gilt:

- Ist $\tilde{x}$ eine Maximalstelle bzw. Minimalstelle von $\hat{L}$
- mit $g^j(\tilde{x}) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$
- dann ist $\tilde{x}$ auch Maximalstelle bzw. Minimalstelle von (O)