Statistik

für Betriebswirtschaft, Internationales Management, Wirtschaftsinformatik und Informatik

Sommersemester 2017

Hausaufgabe:
A 68-78

HSA Statistik SS 2017 Sessionlist		
Datum	Statistik für BW/IM/I/Winf	Nr.
15.03.2017	Einführung Statistik	1
22.03.2017	Differentialrechnung, 2-dim Diff.Rechnung	2
29.03.2017	univ. deskr. Stat., Quantile, Plots	3
05.04.2017	Streuung, Konzentrationsmaße	4
12.04.2017	Kontingenztabellen, Mosaikplots, Korrelation	5
19.04.2017	Preisindizes, lineare Regression	6
26.04.2017	Wahrscheinlichkeitsbegriff	7
03.05.2017	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes	8
10.05.2017	diskrete Zufallsvariablen	9
17.05.2017	Stetige ZV, Gleichverteilung	10
24.05.2017	Pyramid	
31.05.2017	Normalverteilung, Verteilungsparameter	11
07.06.2017	Schätzfunktionen und Punktschätzer	12
14.06.2017	Konfidenzintervalle	13
21.06.2017	Wiederholung, Besprechung Probeklausur	14
28.06.2017	Prüfungswoche	15

Stefan Etschberger

Beispielaufgabe aus Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2017). Statistik - Arbeitsbuch. 10. Aufl. De Gruyter Oldenbourg.
E-Book innerhalb des Hochschulnetzes frei erhältlich:
https://goo.gl/JtnOxL

Aufgabe 2.30

Das monatliche Einkommen betrage mindestens x_0 Geldeinheiten, wobei x_0 durch Tarifverträge, das soziale Netz und dergleichen bestimmt wird. Zur approximativen Beschreibung der Einkommensverteilung wird häufig eine Dichtefunktion der Form

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geqq x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

benutzt, wobei α ein positiver vorgegebener Parameter und c eine noch zu bestimmende Normierungskonstante ist.

a) Bestimmen Sie c.
b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F des Einkommens X.
c) Setzen Sie speziell $\alpha = 1$ sowie $x_0 = 1\,000$ Euro und berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X > 10\,000 | X \geqq 5\,000) \,,$$

d. h. den Anteil derjenigen unter den mindestens 5 000 Euro Verdienenden, die sogar über 10 000 Euro verdienen.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{c}{x^{\alpha+1}}\,dx = c\cdot\int_{x_0}^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\,dx$

$= c\cdot\left[\frac{1}{-\alpha-1+1}\, x^{-\alpha-1+1}\right]_{x_0}^{\infty}$

$= c\cdot\left[\frac{1}{-\alpha}\, x^{-\alpha}\right]_{x_0}^{\infty} = c\cdot\left(\frac{1}{-\alpha}\cdot 0 - \left(\frac{1}{-\alpha}\cdot x_0^{-\alpha}\right)\right)$

$= \frac{c}{\alpha}\, x_0^{-\alpha} = 1$

$\Leftrightarrow \quad c = \alpha\cdot x_0^{\alpha}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geqslant x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b), c) $\rightarrow$ Hausaufgabe

Lösung zu Aufgabe 2.30

a) Nachdem die Fläche unterhalb des Graphen von $f(x)$ gleich eins sein muss, gilt:

$$1 = \int_{x_0}^{\infty} \frac{c}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x = \left[c\cdot\frac{1}{-\alpha-1+1}\cdot x^{-\alpha-1+1}\right]_{x_0}^{\infty} = \frac{c}{\alpha}\cdot x_0^{-\alpha}\,,$$

woraus sich $c = \alpha x_0^{\alpha}$ ergibt.

b)

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \quad (\text{für } x \geqq x_0)\,.$$

c)

$$P(X > 10\,000 | X \geqq 5\,000) = \frac{P(X > 10\,000)}{P(X \geqq 5\,000)} = \frac{1-(1-\frac{1}{10})}{1-(1-\frac{1}{5})} = \frac{1}{2}\,.$$

Normalverteilung

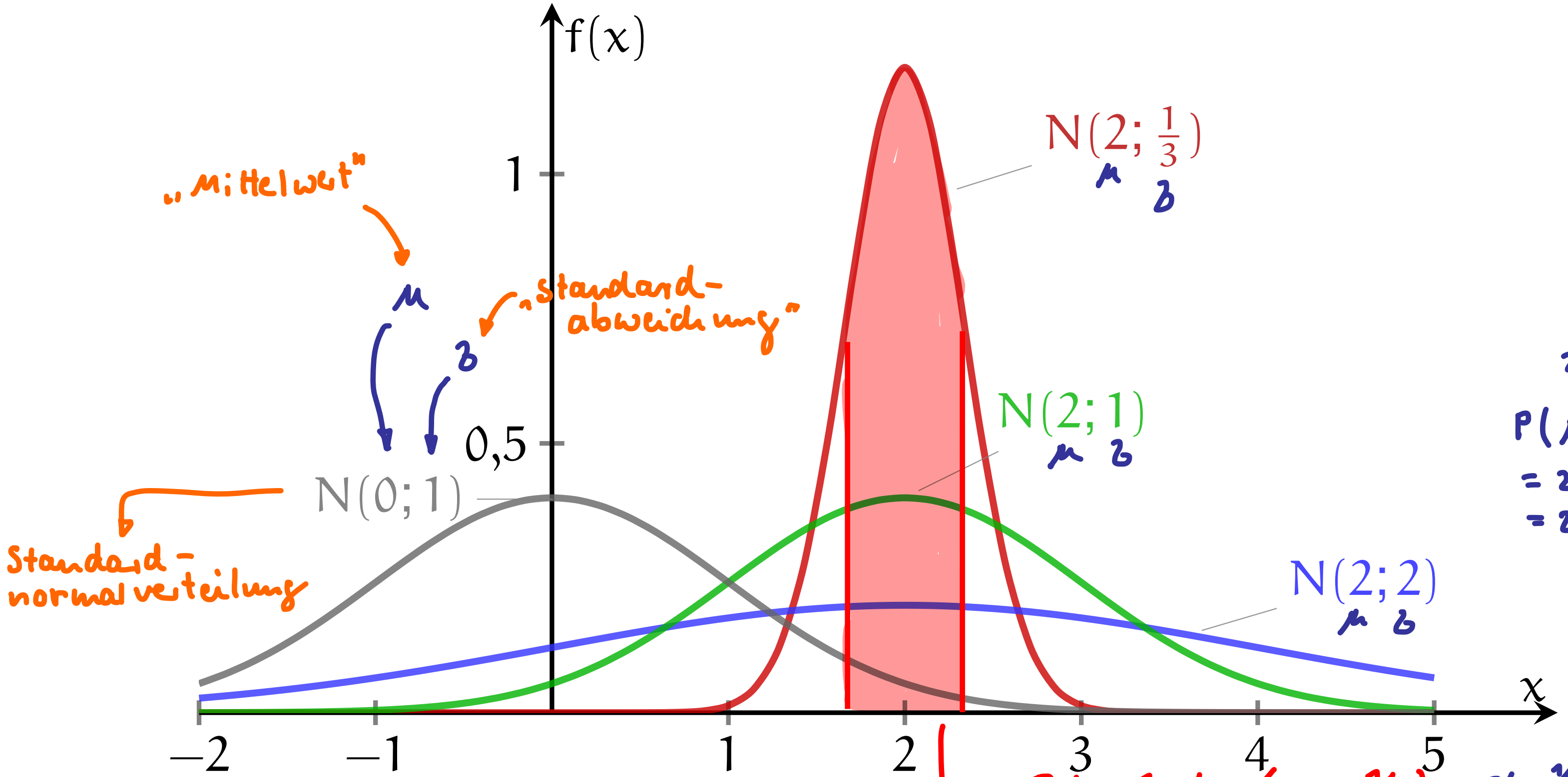
Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Sigma

e^{-x^2}

und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.



2 Sigma-Bereich

$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma)$

$= 2\Phi(2) - 1$

$= 2 \cdot 0.9773 - 1 = 0.9546$

3 Sigma-Bereich

$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma)$

$= 2\Phi(3) - 1$

$\approx 2 \cdot 0.9987 - 1 = 0.9974$

$P(2 - \frac{1}{3} \leq x \leq 2 + \frac{1}{3}) \approx F(2 + \frac{1}{3}) - F(2 - \frac{1}{3})$

$= \Phi\left(\frac{2 + \frac{1}{3} - 2}{\frac{1}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{2 - \frac{1}{3} - 2}{\frac{1}{3}}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$= 2\Phi(1) - 1$

$= 2 \cdot 0.8414 - 1 = 0.6828$

1-Sigma-Bereich

Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

Normalverteilung: Gaußkurve

Normalverteilung

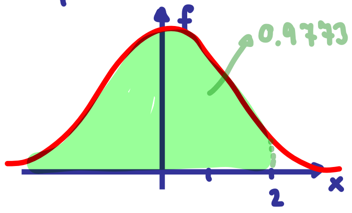
C.F. Gauß

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$X \sim N(0;1)$

$P(X \leq 2) = F(2)$
$= \Phi(2.00) = 0.9773$



gegeben: ZV $X \sim N(0;1)$
gesucht: x, so dass
$P(X \leq x) = 0.90$
$\Leftrightarrow F(x) = 0.90$
$\Rightarrow x \approx 1.285$

Beispiel: $X \sim N(100; 15)$

$P(X \leq 115)$
$= F(115) = \Phi\left(\frac{115-100}{15}\right)$ μ σ
$= \Phi(1.00) = 0.8414$

$P(X \geq 140)$
$= 1 - F(140)$
$= 1 - \Phi\left(\frac{140-100}{15}\right)$
$\approx 1 - \Phi(2.67)$
$\approx 1 - 0.9962 = 0.0038$

$P(X \leq 70) = F(70)$
$= \Phi\left(\frac{70-100}{15}\right) = \Phi(-2)$
$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9773 = 0.0227$

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

Eigenschaften der Normalverteilung

- Dichte ist symmetrisch zu μ:

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

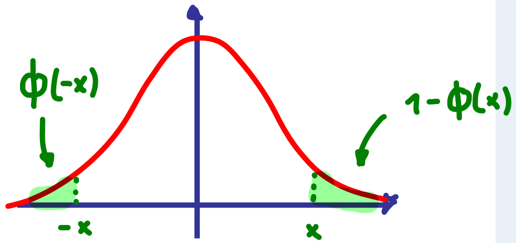
➡ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter

- Standardnormalverteilung:
  $N(0;1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ ($\rightarrow$ Tabelle 3)
- Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:
  $X \sim N(\mu;\sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

- Tabelle enthält nur positive x: Deswegen

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$



Normalverteilung: Beispiel

Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

Lösung:

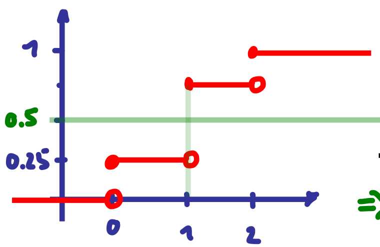
$$
\begin{aligned}
P(37 \leqq X \leqq 41) &= F(41) - F(37) \\
&= \Phi\left(\tfrac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{37-39}{2}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\
&= 0{,}6826
\end{aligned}
$$

Lageparameter

a) **Modus** x_{Mod}: $f(x_{\text{Mod}}) \geqq f(x)$ für alle x
(i.A. nicht eindeutig, z.B. Gleichverteilung)

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Mod}} = \mu$
- Diskrete Verteilung mit:



x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$

$\Rightarrow x_{Med} = 1$

b) **Median** x_{Med}: $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$ bzw. kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Med}} = \mu$
- Diskrete Verteilung
  oben: $F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1$

Lageparameter: Fraktile

c) **α-Fraktil** x_α: $F(x_\alpha) = \alpha$ (für stetige Verteilungen)

Beispiel: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(3;2)$

$$\begin{aligned} x_{0,975} &= & &1{,}96 \quad \text{(Tab. 3)} \\ x_{0,025} &= -x_{0,975} &&= -1{,}96 \\ y_{0,025} &= 2 \cdot x_{0,025} + 3 &&= -0{,}92 \end{aligned}$$

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0,5}$
- Wenn x_α nicht vertafelt $\to$ Interpolation:

$$x_\alpha \approx x_a + (x_b - x_a) \cdot \frac{\alpha - a}{b - a}$$

mit a : größte vertafelte Zahl $< \alpha$
b : kleinste vertafelte Zahl $> \alpha$

Beispiel: $X \sim N(0;1)$; $x_{0,6} \approx$
$0{,}25 + (0{,}26 - 0{,}25) \cdot \frac{0{,}6 - 0{,}5987}{0{,}6026 - 0{,}5987} = 0{,}2533$

Lageparameter: Erwartungswert

deskr. Statistik : arithm. Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \sum a_i \cdot f_i$

d) Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ:

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad E(X) = 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = 1$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{folgt}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx \right]$$

$$= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -0 - \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Beispiel: Glücksspiel, Einsatz 10 €

Auszahlungsverteilung ($X \hat{=}$ Gewinn)

x	-10	0	200
$f(x)$	0.9	0.08	0.02

Erwartungswert:

$$E[X] = -10 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.08 + 200 \cdot 0.02 = -5 €$$

Beispiel: Erwartungswert der Gleichverteilung

X ist gleichverteilt mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

$$\boxed{E[X] = \frac{b+a}{2}}$$

Erwartungswert der Gleichverteilung

Beispiel: Varianz einer Gleichverteilung

X mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow E[X] = \frac{b}{2}$

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$= \int_0^b \left(x - \tfrac{b}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{b}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{b}\left[\tfrac{1}{3}\left(x-\tfrac{b}{2}\right)^3\right]_0^b = \tfrac{1}{b}\cdot\tfrac{1}{3}\left(\left(b-\tfrac{b}{2}\right)^3 - \left(0-\tfrac{b}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b^3}{8}+\frac{b^3}{8}\right) = \frac{1\cdot b^3}{b\cdot 3\cdot 4} = \frac{b^2}{12}$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Ist f symmetrisch bzgl. a, so gilt $E(X) = a$
  Beispiel: f der Gleichverteilung symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Lineare Transformation:

$$\boxed{E(a + bX) = a + b \cdot E(X)}$$

- Summenbildung:

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0;10]$, $Y \sim N(1;1)$; $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X + 5Y) = E(X) + E(5Y) = E(X) + 5 \cdot E(Y) = \frac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

- Unabhängigkeit:

$$X,\ Y \text{ unabhängig} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Streuungsparameter

deskriptiv: mittlere quadr. Abweichung

- **Varianz** $\operatorname{Var}(X)$ bzw. σ^2:

$$\operatorname{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \begin{cases} \sum_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i), & \text{wenn } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\,dx, & \text{wenn } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Standardabweichung** $\operatorname{Sta}(X)$ bzw. σ:

$$\operatorname{Sta}(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

: $E[X] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

$$\operatorname{Var}(X) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X (Dichte siehe Erwartungswert) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-\lambda x}\,dx \\ &= e^{-\lambda x}\left(-x^2 + \frac{2x}{\lambda} - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right)\Bigg|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-0^2 - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

- Verschiebungssatz:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \quad E(X^2) - [E(X)]^2 &= \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} = \text{Var}(X) \end{aligned}$$

- Lineare Transformation:

$$\text{Var}(a + bX) = b^2 \, \text{Var}(X)$$

- Summenbildung gilt nur, wenn die X_i unabhängig! Dann:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$$

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976