Statistik

für Betriebswirtschaft, Internationales Management, Wirtschaftsinformatik und Informatik

Sommersemester 2017

HSA Statistik SS 2017 Sessionlist		
Datum	Statistik für BW/IM/I/Winf	Nr.
15.03.2017	Einführung Statistik	1
22.03.2017	Differentialrechnung, 2-dim Diff.Rechnung	2
29.03.2017	univ. deskr. Stat., Quantile, Plots	3
05.04.2017	Streuung, Konzentrationsmaße	4
12.04.2017	Kontingenztabellen, Mosaikplots, Korrelation	5
19.04.2017	Preisindizes, lineare Regression	6
26.04.2017	Wahrscheinlichkeitsbegriff	7
03.05.2017	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes	8
10.05.2017	diskrete Zufallsvariablen	9
17.05.2017	Stetige ZV, Gleichverteilung	10
24.05.2017	Pyramid	
31.05.2017	Normalverteilung, Verteilungsparameter	11
07.06.2017	Schätzfunktionen und Punktschätzer	12
14.06.2017	Konfidenzintervalle	13
21.06.2017	Wiederholung, Besprechung Probeklausur	14
28.06.2017	Prüfungswoche	15

Stefan Etschberger

Outline

1 Statistik: Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

2 Differenzieren 2
- Partielle Ableitung
- Kurvendiskussion
- Optimierung mit Nebenbedingungen

3 Deskriptive Statistik
- Häufigkeiten
- Lage und Streuung
- Konzentration
- Zwei Merkmale
- Korrelation
- Preisindizes
- Lineare Regression

4 Wahrscheinlichkeitstheorie
- Kombinatorik
- Zufall und Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariablen und Verteilungen
- Verteilungsparameter

5 Induktive Statistik
- Grundlagen
- Punkt-Schätzung
- Intervall-Schätzung
- Signifikanztests

Material zur Vorlesung

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Kursmaterial:

- Aufgabensatz (beinhaltet Aufgaben zu R)
- Handout der Folien
- Alle Folien inklusive Anmerkungen (nach der jeweiligen Vorlesung)
- Beispieldaten
- Alle Auswertungen als **R**-Datei

Literatur:

Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2017). **Statistik: Eine Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler**. 18. voll aktualisierte Auflage. De Gruyter Oldenbourg.

Dalgaard, Peter (2002). **Introductory Statistics with R**. New York: Springer.

Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.

Prüfung

Klausur:

- Klausur am Ende des Semesters
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Erreichbare Punktzahl: 90
- R ist prüfungsrelevant: Siehe Anmerkungen in Übungsaufgaben!
- Hilfsmittel:
  - Schreibzeug,
  - Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,
  - ein Blatt (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke),
- Danach (optional): Für Teilnehmer der Statistik-Plus Vorlesung noch eine 30-minütige Teilklausur über zusätzliche Inhalte (2 Wahlfachcredits zusätzlich möglich; Hilfsmittel TR und ein Blatt)

Datenbasis

Fragebogen

Umfrage Statistik am 13. März 2017

Bitte beantworten Sie folgende Fragen vollständig und füllen Sie jeweils *nur eine* beliebige Spalte *leserlich* aus.

Ihr Studiengang (BW/IM/WInf/Inf)										
Ihr Alter (in Jahren)										
Ihre Größe (in cm)										
Ihr Geschlecht (m/w)										
Wie alt ist (bzw. wäre) Ihr Vater heute?										
Wie alt ist (bzw. wäre) Ihre Mutter heute?										
Größe Ihres Vaters (cm)										
Größe Ihrer Mutter (cm)										
Wie viele (leibliche) Geschwister haben Sie? (Halbgeschwister: jeweils +0.5)										
Wunschfarbe für Ihr nächstes Smartphone; mögliche Auswahl: (si)lber, (sc)hwarz, (w)eiß, (g)elb, (b)lau, (r)ot										
Ausgaben für Ihre mobile Kommunikation (egal wer bezahlt hat) in den vergangenen 12 Monaten inkl. Hardware (Smartphone, Zubehör), Software (Apps), Vertrag										
Wie viele Paar Schuhe besitzen Sie?										
Ausgaben für Ihre Schuhe (egal wer bezahlt hat) in den letzten 12 Monaten										
Ihre Essgewohnheiten; mögliche Auswahl: (f)ruktarisch, (vegan), (vege)tarisch, (p)escetarisch – also vegetarisch und Fische, (c)arnivor, also auch Fleisch										
Sind Sie Raucher? mögliche Auswahl: (ja), (nein)										
Ihre Note in der Matheklausur (Note oder (n)icht mitgeschrieben)										
Waren Sie mit Ihrer Leistung in der Matheklausur zufrieden? Antworten: (s)ehr zufrieden, (z)ufrieden, (g)eht so, (u)nzufrieden, (n)icht mitgeschrieben										

Gliederung

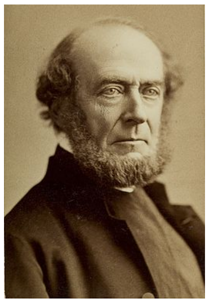
1. Statistik: Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Induktive Statistik

1 Statistik: Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

Zitate

- **Leonard Henry Courteney (1832-1918)**:

  „There are three kinds of lies: lies, damned lies and statistics.“



- **Winston Curchill (1874-1965) angeblich**:

  „Ich glaube nur den Statistiken, die ich selbst gefälscht habe.“

- **Andrew Lang (1844-1912)**:

  „Wir benutzen die Statistik wie ein Betrunkener einen Laternenpfahl: Vor allem zur Stütze unseres Standpunktes und weniger zum Beleuchten eines Sachverhalts.“

DRAWN BY BURNE MURDOCK. ENGRAVED BY J. F. JUNGLING.

Quellen: Wikimedia Commons

1. Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

2. Differenzieren 2

3. Deskriptive Statistik

4. W-Theorie

5. Induktive Statistik

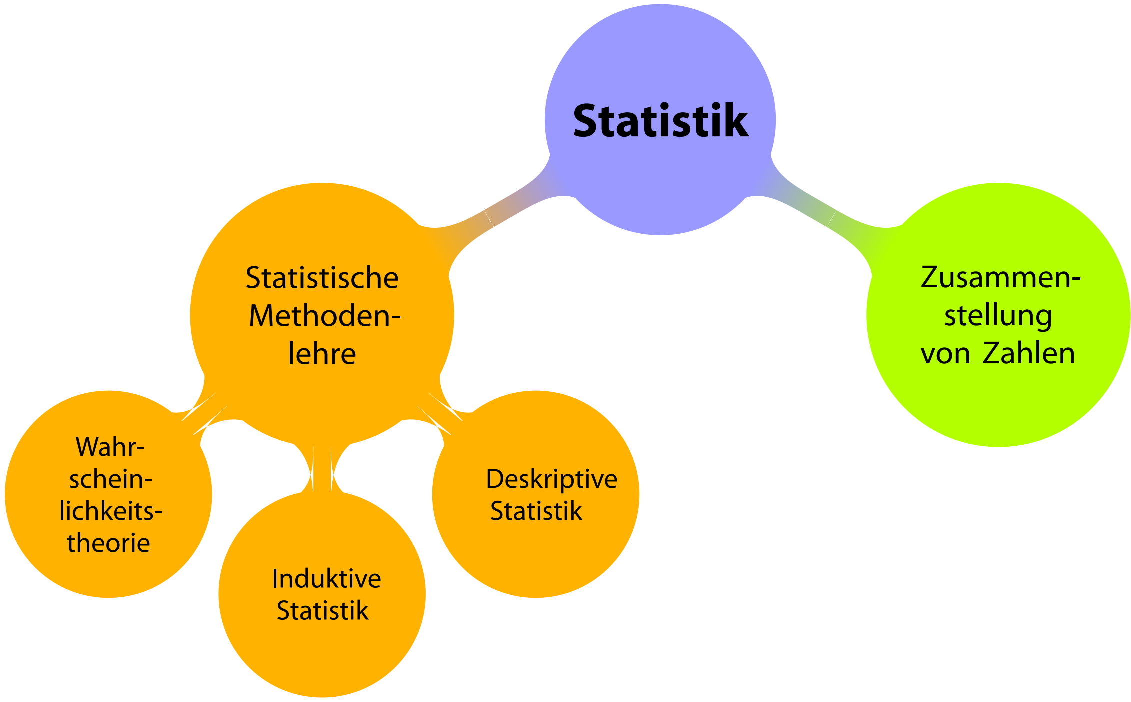
Quellen

Tabellen

Bedeutungen des Begriffs Statistik

1. Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen



Einfaches Beispiel

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel

12 Beschäftigte werden nach der Entfernung zum Arbeitsplatz (in km) befragt.
Antworten: 4, 11, 1, 3, 5, 4, 20, 4, 6, 16, 10, 6

- deskriptiv:
  - Durchschnittliche Entfernung: $7{,}5$
  - Klassenbildung:

Klasse	$[0;5)$	$[5;15)$	$[15;30)$
Häufigkeit	5	5	2

- induktiv:
  - Schätze die mittlere Entfernung **aller** Beschäftigten.
  - Prüfe, ob die mittlere Entfernung geringer als 10 km ist.

Merkmale

1. Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

2. Differenzieren 2

3. Deskriptive Statistik

4. W-Theorie

5. Induktive Statistik

Quellen

Tabellen

- Merkmalsträger: Untersuchte statistische Einheit
- Merkmal: Interessierende Eigenschaft des Merkmalträgers
- (Merkmals-)Ausprägung: Konkret beobachteter Wert des Merkmals
- Grundgesamtheit: Menge aller relevanten Merkmalsträger
- Typen von Merkmalen:
  a) qualitativ – quantitativ
     - qualitativ: z.B. Geschlecht
     - quantitativ: z.B. Schuhgröße
     - Qualitative Merkmale sind quantifizierbar (z.B.: weiblich 1, männlich 0)
  b) diskret – stetig
     - diskret: Abzählbar viele unterschiedliche Ausprägungen
     - stetig: Alle Zwischenwerte realisierbar

Skalenniveaus

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
- Berühmte Leute zur Statistik
- Wie lügt man mit Statistik?
- Gute und schlechte Grafiken
- Begriff Statistik
- Grundbegriffe der Datenerhebung
- R und RStudio

2. Differenzieren 2

3. Deskriptive Statistik

4. W-Theorie

5. Induktive Statistik

Quellen

Tabellen

Nominalskala:

- Zahlen haben nur Bezeichnungsfunktion
- z.B. Artikelnummern

Ordinalskala:

- zusätzlich Rangbildung möglich
- z.B. Schulnoten
- Differenzen sind aber **nicht** interpretierbar!
  ➠ Addition usw. ist unzulässig.

Kardinalskala:

- zusätzlich Differenzbildung sinnvoll
- z.B. Gewinn
- Noch feinere Unterscheidung in: Absolutskala, Verhältnisskala, Intervallskala

Skalendegression und Skalenprogression

1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Ziel der Skalierung: Gegebene Information angemessen abbilden, möglichst ohne Über- bzw. Unterschätzungen

Es gilt:

- Grundsätzlich können alle Merkmale nominal skaliert werden.
- Grundsätzlich kann jedes metrische Merkmal ordinal skaliert werden.

Das nennt man Skalendegression. Dabei: Informationsverlust

Aber:

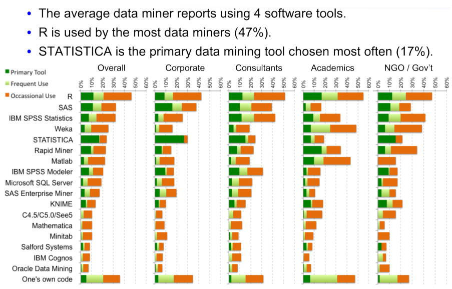
- Nominale Merkmale dürfen **nicht** ordinal- oder metrisch skaliert werden.
- Ordinale Merkmale dürfen **nicht** metrisch skaliert werden.

Das nennt nennt man Skalenprogression. Dabei: Interpretation von **mehr Informationen** in die Merkmale, als inhaltlich vertretbar.
(Gefahr der **Fehlinterpretation**)

Was ist R und warum soll man es benutzen?

1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- R ist ein freies Softwarepaket zu Statistik und Datenanalyse
- R ist sehr mächtig und weit verbreitet in Wissenschaft und Industrie (sogar von mehr Leuten benutzt als z.B. SPSS)
- Ursprung von R: 1993 an der Universität Auckland von Ross Ihaka and Robert Gentleman entwickelt
- Seitdem: Viele Leute haben R verbessert mit tausenden von Paketen für viele Anwendungen
- Nachteil (auf den ersten Blick): Kein point und click tool
- Großer Vorteil (auf den zweiten Blick): Kein point und click tool



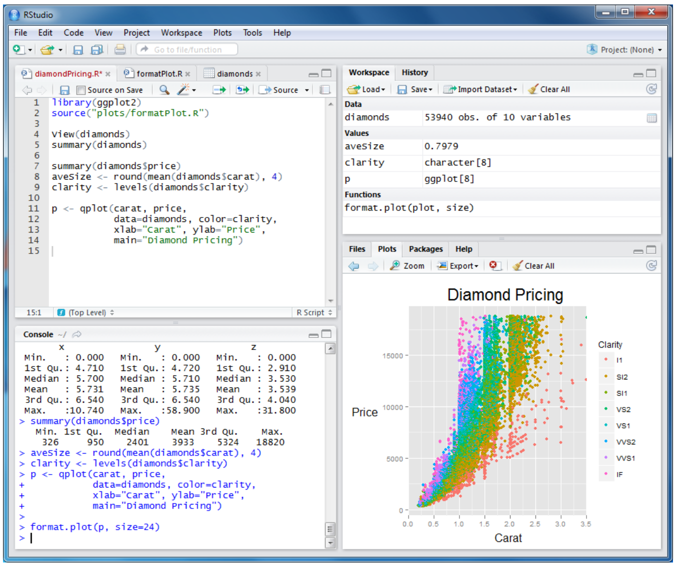
source: `http://goo.gl/axhGhh`

graphics source: `http://goo.gl/W70kms`

Was ist RStudio?

- RStudio ist ein Integrated Development Environment (IDE) um R leichter benutzen zu können.
- Gibt's für OSX, Linux und Windows
- Ist auch frei
- Trotzdem: Sie müssen Kommandos schreiben
- Aber: RStudio unterstützt Sie dabei
- **Download:** `RStudio.com`

R Studio™
Free & Open-Source IDE for R

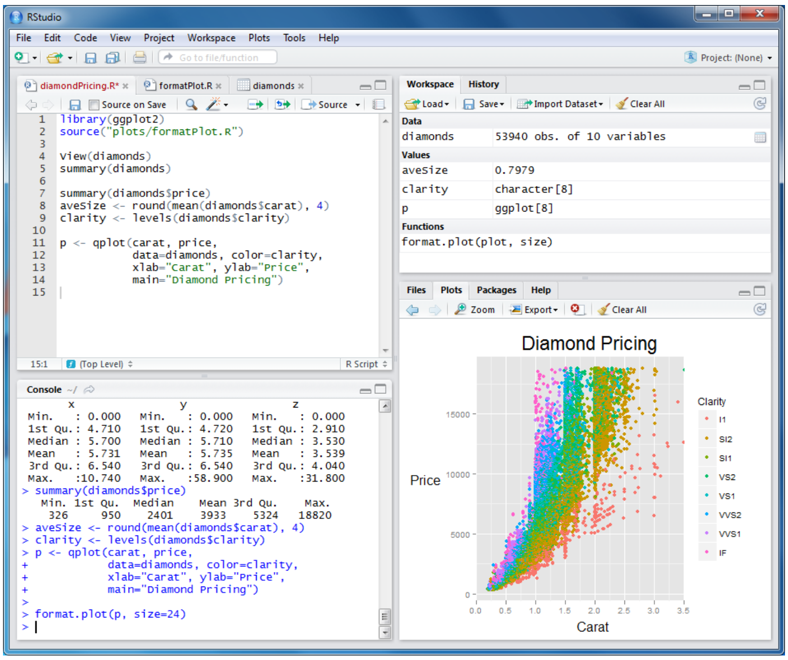


1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Erste Schritte

RStudio Kennenlernen

- Code
- Console
- Workspace
- History
- Files
- Plots
- Packages
- Help
- Auto-Completion
- Data Import



1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Daten einlesen und Struktur anschauen


```
# Daten einlesen (hier: Netzwerverbindung nötig)
MyData = read.csv2("https://goo.gl/WNgGMJ")
```

```
# inspect structure of data
str(MyData)

## 'data.frame': 939 obs. of  19 variables:
##  $ Jahrgang       : int  2014 2014 2017 2014 2017 2017 2014 2016 NA 2016 ...
##  $ X              : logi  NA NA NA NA NA NA ...
##  $ Alter          : int  20 28 24 22 25 25 22 35 20 26 ...
##  $ Groesse        : int  179 180 165 166 182 182 181 173 180 160 ...
##  $ Geschlecht     : Factor w/ 2 levels "Frau","Mann": 2 2 1 1 2 2 2 2 2 1 ...
##  $ AlterV         : int  58 62 70 50 80 80 55 75 46 52 ...
##  $ AlterM         : int  55 41 62 48 70 70 50 70 44 52 ...
##  $ GroesseV       : int  180 170 170 168 183 183 175 180 182 178 ...
##  $ GroesseM       : int  165 168 167 167 175 175 165 160 170 167 ...
##  $ Geschwister    : num  9 9 8 7 6 6 6 6 5 5 ...
##  $ Farbe          : Factor w/ 7 levels "blau","gelb",..: 4 4 5 4 1 1 1 4 3 6 ...
##  $ AusgKomm       : num  500 235 500 250 500 500 400 250 15 1000 ...
##  $ AnzSchuhe      : int  8 5 35 13 5 5 4 25 3 12 ...
##  $ AusgSchuhe     : int  400 16 500 270 500 300 150 375 100 220 ...
##  $ Essgewohnheiten: Factor w/ 5 levels "carnivor","fruktarisch",..: NA NA 1 NA 1 1 NA 1 1 1 ...
##  $ Raucher        : Factor w/ 2 levels "ja","nein": NA NA 2 NA 2 2 NA 2 2 2 ...
##  $ NoteMathe      : num  3 2.3 NA 2.3 1.7 1.7 3 2.3 2 NA ...
##  $ MatheZufr      : Ord.factor w/ 4 levels "unzufrieden"<..: 2 3 NA 2 3 3 2 3 2 NA ...
##  $ Studiengang    : Factor w/ 5 levels "BW","ET","IM",..: NA NA 5 NA 4 4 NA 5 5 5 ...
```


Erste Zeilen der Datentabelle


```
# Erste Zeilen in Datentabelle
head(MyData, 6)

##   Jahrgang  X Alter Groesse Geschlecht AlterV AlterM GroesseV GroesseM Geschwister   Farbe AusgKomm
## 1     2014 NA    20     179       Mann     58     55      180      165           9 schwarz      500
## 2     2014 NA    28     180       Mann     62     41      170      168           9 schwarz      235
## 3     2017 NA    24     165       Frau     70     62      170      167           8  silber      500
## 4     2014 NA    22     166       Frau     50     48      168      167           7 schwarz      250
## 5     2017 NA    25     182       Mann     80     70      183      175           6    blau      500
## 6     2017 NA    25     182       Mann     80     70      183      175           6    blau      500
##   AnzSchuhe AusgSchuhe Essgewohnheiten Raucher NoteMathe MatheZufr Studiengang
## 1         8        400            <NA>    <NA>       3.0   geht so        <NA>
## 2         5         16            <NA>    <NA>       2.3 zufrieden        <NA>
## 3        35        500        carnivor    nein        NA      <NA>          WI
## 4        13        270            <NA>    <NA>       2.3   geht so        <NA>
## 5         5        500        carnivor    nein       1.7 zufrieden         Inf
## 6         5        300        carnivor    nein       1.7 zufrieden         Inf
```

```
# lege MyData als den "Standard"-Datensatz fest
attach(MyData)
```

```
# Wie Viele Objekte gibt's im Datensatz?
nrow(MyData)

## [1] 939

# Wie Viele Merkmale?
ncol(MyData)

## [1] 19
```

Daten kennenlernen


```
# Auswahl spezieller Objekte und Merkmale über [Zeile, Spalte]
MyData[1:3, 2:5]

##    X Alter Groesse Geschlecht
## 1 NA    20     179       Mann
## 2 NA    28     180       Mann
## 3 NA    24     165       Frau
```

```
# Auswahl von Objekten über logische Ausdrücke
Auswahl = (MyData$Geschlecht=="Mann" & MyData$Alter < 19)
# zeige die ersten Einträge
head(Auswahl, 30)

##  [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [17] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE

# Ausgabe der Auswahl: Alter, Alter des Vaters und der Mutter
MyData[Auswahl,                      # Objektauswahl
      c("Alter", "AlterM", "AlterV")]  # Welche Merkmale?

##     Alter AlterM AlterV
## 112    18     50     57
## 372    18     51     55
## 422    18     49     50
## 445    18     44     48
## 472    18     52     44
## 543    18     52     57
## 555    18     46     52
## 580    18     45     48
## 590    18     52     54
## 601    18     40     44
## 708    18     52     55
## 737    17     46     50
## 780    18     49     58
```

1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Daten kennenlernen


```
# Zeige die Männer, die mehr als 1750 Euro für Schuhe
# und Mobilfunk zusammen ausgegeben haben
MyData.Auswahl = MyData[MyData$Geschlecht=="Mann" &
                        MyData$AusgSchuhe + MyData$AusgKomm > 1750,
                        c("Alter", "Geschwister", "Farbe",
                          "AusgSchuhe", "AusgKomm")]
```

```
# ohne NAs
MyData.Auswahl = na.exclude(MyData.Auswahl)
MyData.Auswahl

##     Alter Geschwister   Farbe AusgSchuhe AusgKomm
## 17     25         4.5 schwarz       1200      600
## 57     21         3.0 schwarz        100     2000
## 58     21         3.0 schwarz        250     3500
## 119    20         2.5 schwarz        300     1500
## 137    20         2.0 schwarz        300     3000
## 138    23         2.0 schwarz        270     2073
## 139    26         2.0 schwarz        300     2000
## 140    25         2.0  silber        200     1900
## 141    23         2.0   weiss        160     1800
## 142    27         2.0 schwarz        200     1800
## 143    20         2.0 schwarz        290     1570
## 144    20         2.0   weiss       2500     1500
## 382    25         1.0   weiss       1000     5000
## 423    24         1.0 schwarz         70     4668
## 424    22         1.0     rot        200     2500
## 425    23         1.0 schwarz        200     2000
## 427    26         1.0    blau        600     1850
## 855    25         0.0 schwarz        120     1900
```

1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Daten kennenlernen


```
# Neue Spalte Gesamtausgaben:
MyData.Auswahl$AusgGesamt = MyData.Auswahl$AusgKomm + MyData.Auswahl$AusgSchuhe
# sortiert nach Gesamtausgaben
MyData.Auswahl[order(MyData.Auswahl$AusgGesamt), ]

##     Alter Geschwister   Farbe AusgSchuhe AusgKomm AusgGesamt
## 17     25         4.5 schwarz       1200      600       1800
## 119    20         2.5 schwarz        300     1500       1800
## 143    20         2.0 schwarz        290     1570       1860
## 141    23         2.0   weiss        160     1800       1960
## 142    27         2.0 schwarz        200     1800       2000
## 855    25         0.0 schwarz        120     1900       2020
## 57     21         3.0 schwarz        100     2000       2100
## 140    25         2.0  silber        200     1900       2100
## 425    23         1.0 schwarz        200     2000       2200
## 139    26         2.0 schwarz        300     2000       2300
## 138    23         2.0 schwarz        270     2073       2343
## 427    26         1.0    blau        600     1850       2450
## 424    22         1.0     rot        200     2500       2700
## 137    20         2.0 schwarz        300     3000       3300
## 58     21         3.0 schwarz        250     3500       3750
## 144    20         2.0   weiss       2500     1500       4000
## 423    24         1.0 schwarz         70     4668       4738
## 382    25         1.0   weiss       1000     5000       6000
```

1. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Gliederung

1. Statistik: Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Induktive Statistik

2 Differenzieren 2
- Partielle Ableitung
- Kurvendiskussion
- Optimierung mit Nebenbedingungen

Partielle Differenzierbarkeit

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Betrachtet werden

- Funktionen $f: D \to \mathbb{R}, \quad D \in \mathbb{R}^n$
- mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = z$
- außerdem: i-ter Einheitsvektor $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$
- und: $x + h \cdot e_i \in D$ mit $h > 0$

Definition

- f heißt im Punkt x partiell differenzierbar bei Existenz des Genzwerts:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h}$$

- In diesem Fall heißt dieser Grenzwert $f_{x_i}(x)$ die erste partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt x. Schreibweisen:

$$f^i(x) = f_{x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Partielle Differenzierbarkeit

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Differenzierbarkeit auf $D_1 \subseteq D$

- Die Funktion $f: D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- heißt in $D_1 \subseteq D$ partiell differenzierbar
- wenn f für alle $x \in D_1$ partiell differenzierbar ist

Gradient

- Ist die Funktion $f: D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x
- nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar, dann heißt

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Gradient von f im Punkt $x \in D$

Tangentialhyperebenen

Tangentialebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialebene:
  $T(x_1, x_2) = f(x) + \frac{\partial f}{x_1}(\tilde{x}) \cdot (x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{\partial f}{x_2}(\tilde{x}) \cdot (x_2 - \tilde{x}_2)$

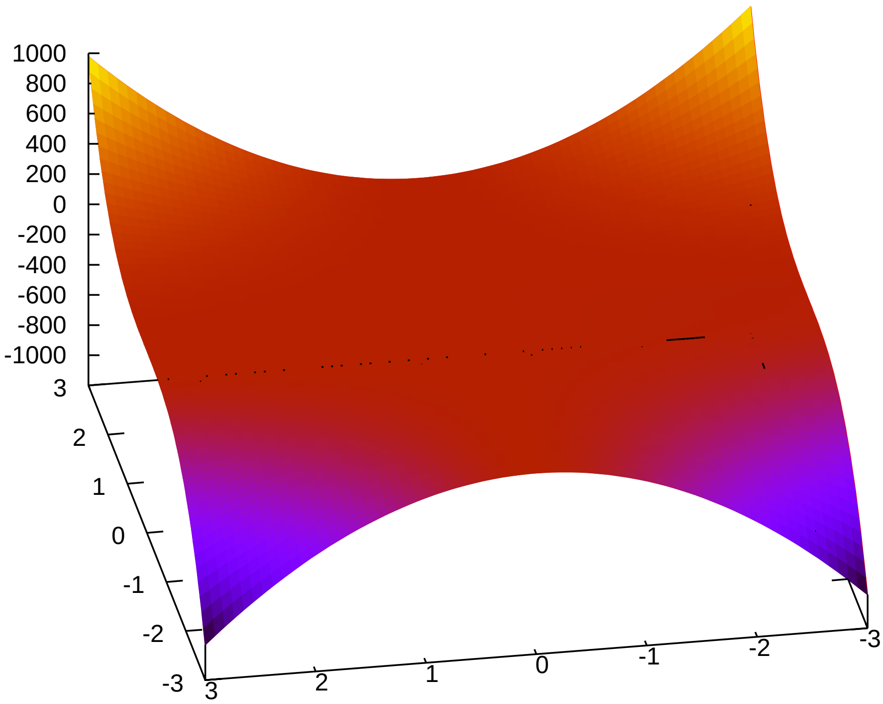
Tangentialhyperebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x}$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialhyperebene:

$$H(x) = f(\tilde{x}) + (\nabla f(\tilde{x}))^T \cdot (x - \tilde{x})$$

Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$
- Gesucht: Tangentialebene im Punkt $(1, -2, f(1, -2))$



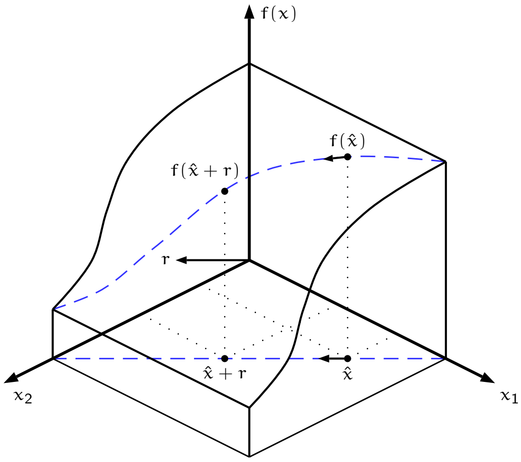
Richtungsableitungen

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $x \in D$
- mit stetig partiellen Ableitungen in D und
- ein Punkt $x \in D$
- und ein Richtungsvektor $r \in D$ mit $\|r\| = 1$.
- Außerdem: Es existiert sowohl ein $\epsilon > 0$ mit $[x - \epsilon r; x + \epsilon r] \in D$
- als auch der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot r) - f(x)}{t}$$



Richtungsableitung

- Dann heißt

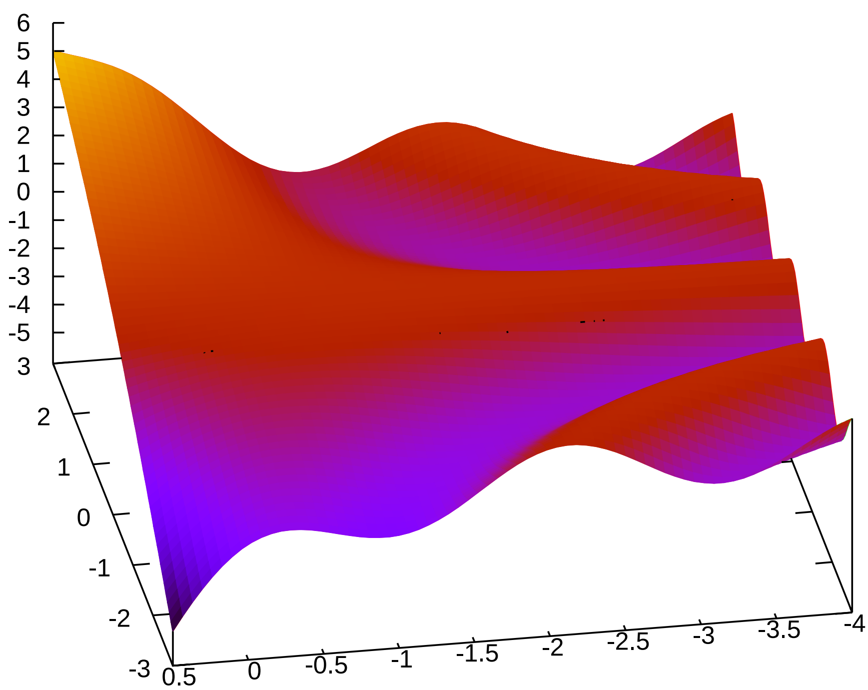
$$\boxed{(\nabla f(x))^T \cdot r}$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung r

Beispiel Tangential(hyper)ebene

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x\,e^y + \cos(xy)$
- Gesucht: Ableitung im Punkt $(2,0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$



Höhere partielle Ableitungen

Voraussetzungen

- Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- in D nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar,
- auch partiell differenzierbar: alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$.

Dann heißt

- f zweimal partiell nach allen Variablen differenzierbar.
- Partielle Ableitungen zweiter Ordnung für $i, j = 1, \dots, n$:

$$f^{ij}(x) = f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Achtung: Zuerst nach x_i, dann nach x_j differenzieren

Satz von Schwarz

Voraussetzungen

- $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig partiell differenzierbar in D
- 2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

- mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$

Dann gilt für alle $x \in D$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\, \partial x_i}$$

Hermann Schwarz (1843-1921)

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Gegeben

- Zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$

Definition

- Die symmetrische Matrix

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt Hessematrix

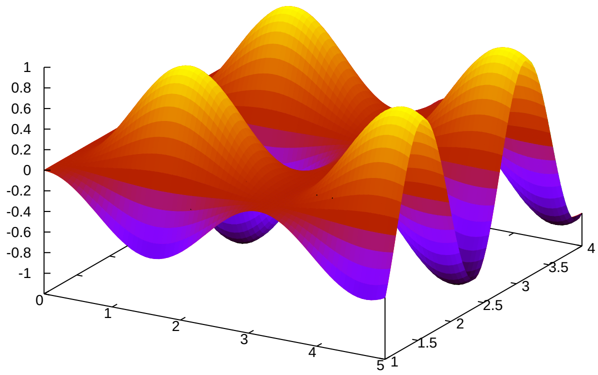
1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

- Gegeben: Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar
- f hat im Punkt $\tilde{x}$ ein lokales Minimum oder Maximum
- Dann gilt: $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Beispiel

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x, y) = \sin^2(x) \cdot \cos(4y)$



Definitheitseigenschaften der Hessematrix

Am Punkt $\tilde{x}$ heißt die Hessematrix $H_f(\tilde{x})$

- positiv definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x > 0$,
- positiv semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \geqslant 0$,
- negativ definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x < 0$,
- negativ semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \leqslant 0$
- jeweils für alle x gilt.
- Andernfalls heißt $H_f(\tilde{x})$ indefinit.

Einfache Kriterien zu Definitheitseigenschaften

Hauptunterdeterminanten

- Gegeben: Symmetrische $n \times n$-Matrix A
- Dann heißt

$$\det H_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

die i-te Hauptunterdeterminante $(i = 1, \ldots, n)$ von A.

Satz

- Matrix A positiv definit $\Leftrightarrow \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv
- Matrix A negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^i \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind negativ

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Voraussetzungen

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar
- Es gibt ein $\tilde{x}$, für das $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Satz

- $H_f(\tilde{x})$ ist negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokale Maximalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokale Minimalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist indefinit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist keine lokale Extremalstelle von f

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist einziges globales Minimum von f
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von f

Konvexität und Konkavität

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Voraussetzungen

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar

Satz

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ f ist streng konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ f ist streng konkav in D

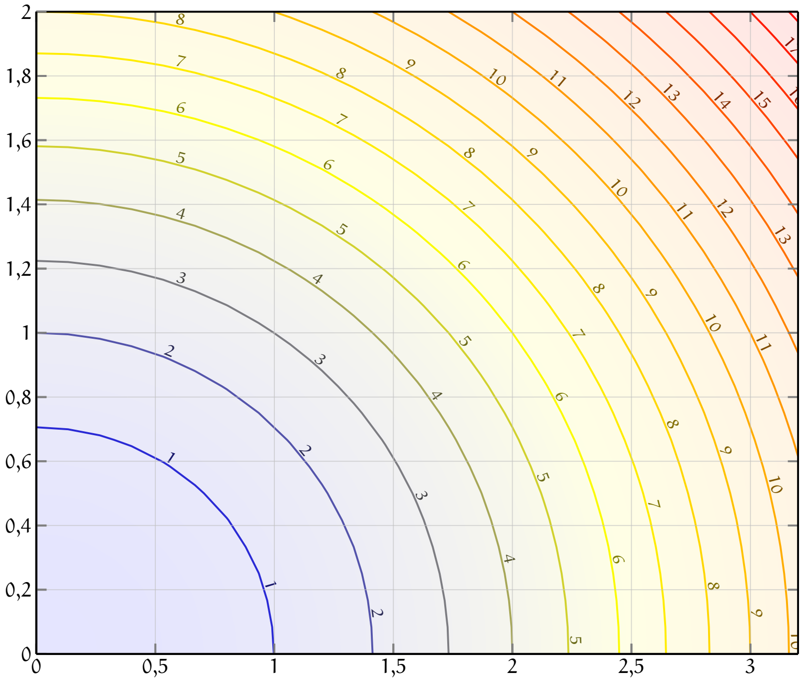
- $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ f ist konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ semidefinit für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ f ist konkav in D

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel

Problem

- Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
- Gesucht: Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit kleinstem Wert von f
- auf der Geraden $2y + x - 3 = 0$



Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Allgemeines Problem

Aufgabe

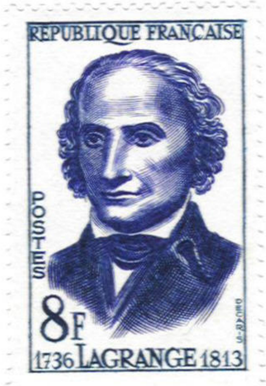
- Maximiere (oder minimiere) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- in Abhängigkeit von $x = (x_1, \dots, x_n)$,
- so dass die Nebenbedingungen $g^i(x) = 0$ mit $g^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $i = 1, \dots, m$ erfüllt sind
- Kurz:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \to \max \quad (\min) \\
\text{NB:}\quad & g^1(x) = 0 \\
& \vdots \\
& g^m(x) = 0
\end{aligned}
$$

Der Ansatz von Lagrange

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Idee von Lagrange



- Gut wäre: Transformation des Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen in eines ohne NB.
- Im Optimum: Gradient der zu optimierenden Funktion und Gradient der NB sind parallel

Lagrangefunktion

- Gegeben: Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max(\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Dazu wird definiert: Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)$$

Satz von Lagrange

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Hessematrix der Lagrangefunktion:

$$\hat{H}_L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Eine Lösung $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ des Systems $\nabla L(x, \lambda) = 0$

Dann gilt:

- $\hat{H}_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Minimum von (O)
- $\hat{H}_L(x, \tilde{\lambda})$ negativ definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(x, \tilde{\lambda})$ positiv definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Minimum von (O)

Variable Lagrange Multiplikatoren

1. Einführung
2. Differenzieren 2
2.1. Partielle Ableitung
2.2. Kurvendiskussion
2.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to$ max (min) unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Lagrangefunktion

$$\hat{L}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(x) g^j(x)$$

Dann gilt:

- Ist $\tilde{x}$ eine Maximalstelle bzw. Minimalstelle von $\hat{L}$
- mit $g^j(\tilde{x}) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$
- dann ist $\tilde{x}$ auch Maximalstelle bzw. Minimalstelle von (O)

Gliederung

1 Statistik: Einführung
2 Differenzieren 2
3 Deskriptive Statistik
4 Wahrscheinlichkeitstheorie
5 Induktive Statistik

3 Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression

Häufigkeitsverteilungen

Auswertungsmethoden für eindimensionales Datenmaterial

- Merkmal X wird an n Merkmalsträgern beobachtet ➠ **Urliste** $(x_1, \ldots, x_n)$
  Im Beispiel: $x_1 = 4$, $x_2 = 11, \ldots, x_{12} = 6$
- Urlisten sind oft unübersichtlich, z.B.:

```
##  [1] 4 5 4 1 5 4 3 4 5 6 6 5 5 4 7 4 6 5 6 4 5 4 7 5 5 6 7 3
## [29] 7 6 6 7 4 5 4 7 7 5 5 5 5 6 6 4 5 2 5 4 7 5
```

- Dann zweckmäßig: Häufigkeitsverteilungen

Ausprägung (sortiert)	a_j	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
absolute Häufigkeit	$h(a_j) = h_j$	1	1	2	12	17	9	8	50
kumulierte abs. H.	$H(a_j) = \sum_{i=1}^{j} h(a_i)$	1	2	4	16	33	42	50	—
relative Häufigkeit	$f(a_j) = h(a_j)/n$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	1
kumulierte rel. H.	$F(a_j) = \sum_{i=1}^{j} f(a_i)$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{33}{50}$	$\frac{42}{50}$	1	—

Empirische Verteilungsfunktion

Statistik
Etschberger – SS2017

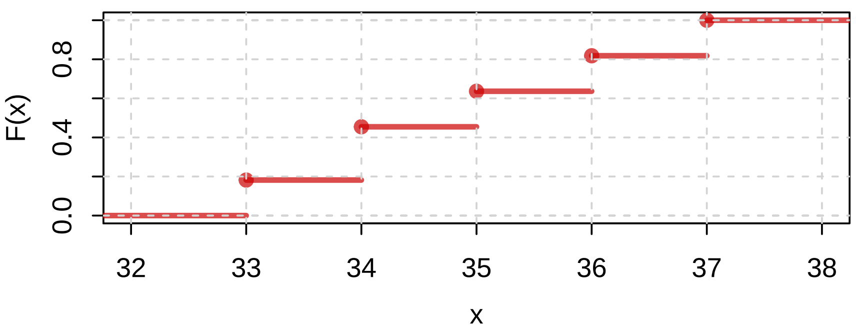
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- für metrische Merkmale
- Anteil der Ausprägungen, die höchstens so hoch sind wie x.
- Exakt:

$$F(x) = \sum_{a_i \leqslant x} f(a_i)$$

Beispiel

```
Studenten.ueber.32 = sort(MyData$Alter[MyData$Alter > 32])
Studenten.ueber.32

##  [1] 33 33 34 34 34 35 35 36 36 37 37

# empirical cumulative distribution function (ecdf)
Studenten.F = ecdf(Studenten.ueber.32)
plot(Studenten.F, col=rgb(0.8,0,0,.7), lwd=3, main="", xlab="x", ylab="F(x)")
grid(lty=2) # Gitternetz
```



Empirische Quantile

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- für metrische Merkmale; Voraussetzung: sortierte Urliste
- Umkehrung der Verteilungsfunktion
- Anteil p gegeben, gesucht: $F^{-1}(p)$, falls vorhanden.
- Definition p-Quantil:

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}), & \text{wenn } n \cdot p \in \mathbb{N}_0 \\ x_{\lceil n\cdot p \rceil}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

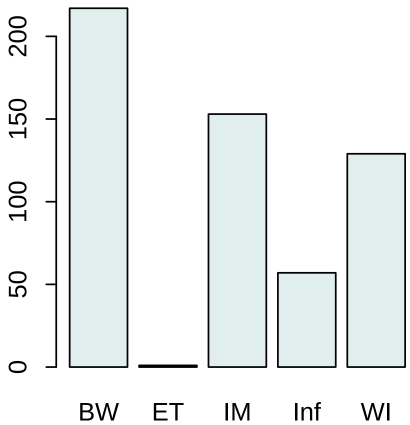
```
##  [1] 33 33 34 34 34 35 35 36 36 37 37

n = length(Studenten.ueber.32)
p = c(0.05, 2/n, 0.3, 0.5, 0.75, 0.9)

quantile(Studenten.ueber.32, probs=p, type=2)

##        5% 18.18182%       30%       50%       75%       90%
##      33.0      33.5      34.0      35.0      36.0      37.0
```


Graphische Darstellungen

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

❶ Balkendiagramm

```
M.t = table(MyData$Studiengang)
M.t

##
##  BW  ET  IM Inf  WI
## 217   1 153  57 129

barplot(M.t, col="azure2")
```



(Höhe proportional zu Häufigkeit)

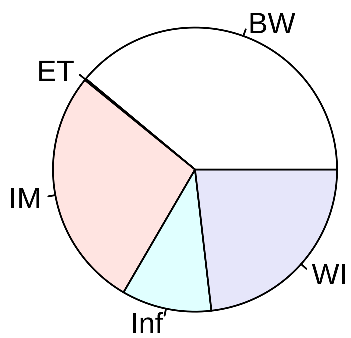
❷ Kreissektorendiagramm

Winkel: $w_j = 360° \cdot f(a_j)$

z.B. $w_{BW} = 360° \cdot \frac{217}{557} \approx 140.4°$

z.B. $w_{IM} = 360° \cdot \frac{153}{557} \approx 97.2°$

```
pie(M.t)
```



(Fläche proportional zu Häufigkeit)

Graphische Darstellungen

❸ Histogramm

- für klassierte Daten
- Fläche proportional zu Häufigkeit:

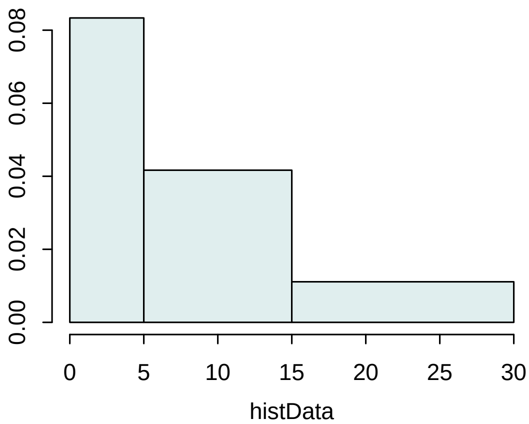
$$\text{Höhe}_j \cdot \text{Breite}_j = c \cdot h(a_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Höhe}_j = c \cdot \frac{h(a_j)}{\text{Breite}_j}}$$

- Im Beispiel mit $c = \frac{1}{12}$:

Klasse	$[0;5)$	$[5;15)$	$[15;30]$
$h(a_j)$	5	5	2
Breite_j	5	10	15
Höhe_j	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{90}$

```r
require(MASS)
histData <- c(0,1,2,3,4,
              5,6,7,10,14,
              15,30)
truehist(histData,
         breaks=c(0, 4.999, 14.999, 30),
         col="azure2", ylab='')
```



Lageparameter

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Modus x_{Mod}: häufigster Wert

Beispiel:

a_j	1	2	4
$h(a_j)$	4	3	1

$\Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$

Sinnvoll bei allen Skalenniveaus.

Median x_{Med}: ‚mittlerer Wert', d.h.

1. Urliste aufsteigend sortieren: $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$
2. Dann

$$x_{\text{Med}} \begin{cases} = x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \in [x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1}], & \text{falls } n \text{ gerade (meist } x_{\text{Med}} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})) \end{cases}$$

Im Beispiel oben:

$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4 \Rightarrow x_{\text{Med}} \in [1;2]$, z.B. $x_{\text{Med}} = 1{,}5$

Sinnvoll ab ordinalem Skalenniveau.

Lageparameter (2)

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Arithmetisches Mittel $\bar{x}$: Durchschnitt, d.h.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot h(a_j)$$

Im Beispiel:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{8} \cdot (\underbrace{1+1+1+1}_{1\cdot 4} + \underbrace{2+2+2}_{2\cdot 3} + \underbrace{4}_{4\cdot 1}) = 1{,}75$$

Sinnvoll nur bei kardinalem Skalenniveau.
Bei klassierten Daten:

$$\bar{x}^* = \tfrac{1}{n}\sum \text{Klassenmitte} \cdot \text{Klassenhäufigkeit}$$

Im Beispiel:

$$\bar{x}^* = \tfrac{1}{12} \cdot (2{,}5 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 22{,}5 \cdot 2) = 8{,}96 \neq 7{,}5 = \bar{x}$$

Streuungsparameter

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Voraussetzung: kardinale Werte $x_1, \ldots, x_n$
- **Beispiel:**

$$\left.\begin{array}{ll|ccc} \text{a)} & x_i & 1950 & 2000 & 2050 \\ \hline \text{b)} & x_i & 0 & 0 & 6000 \end{array}\right\} \text{je } \bar{x} = 2000$$

- Spannweite: $\text{SP} = \max_i x_i - \min_i x_i$

Im Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \text{SP} = 2050 - 1950 = 100 \\ \text{b)} & \text{SP} = 6000 - 0 \quad = 6000 \end{array}$$

- Mittlere quadratische Abweichung:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}_{\text{Verschiebungssatz}}$$

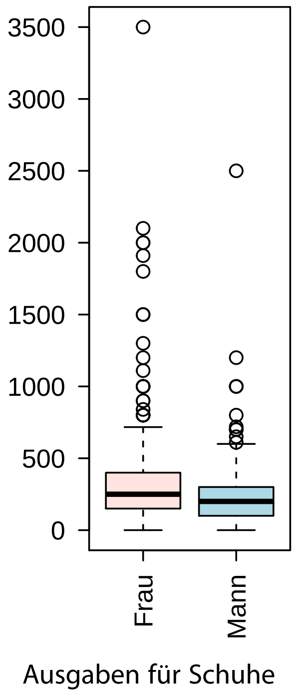
Streuungsparameter (2)

- **Mittlere quadratische Abweichung** im Beispiel:
  a) $s^2 = \frac{1}{3} \cdot (50^2 + 0^2 + 50^2)$
  $= \frac{1}{3} \cdot (1950^2 + 2000^2 + 2050^2) - 2000^2 = 1666{,}67$
  b) $s^2 = \frac{1}{3} \cdot (2000^2 + 2000^2 + 4000^2)$
  $= \frac{1}{3} \cdot (0^2 + 0^2 + 6000^2) - 2000^2 = 8000000$
- **Standardabweichung:** $s = \sqrt{s^2}$
  Im Beispiel:
  a) $s = \sqrt{1666{,}67} = 40{,}82$
  b) $s = \sqrt{8000000} = 2828{,}43$
- **Variationskoeffizient:** $V = \frac{s}{\bar{x}}$ (maßstabsunabhängig)
  Im Beispiel:
  a) $V = \frac{40{,}82}{2000} = 0{,}02 \;(\widehat{=}\, 2\,\%)$
  b) $V = \frac{2828{,}43}{2000} = 1{,}41 \;(\widehat{=}\, 141\,\%)$

Lage und Streuung als Grafik: Boxplot

- Graphische Darstellung von Lage und Streuung
- Box: Oberer/Unterer Rand: 3. bzw. 1. Quartil ($\tilde{x}_{0,75}$ bzw. $\tilde{x}_{0,25}$),
- Linie in Mitte: Median
- Whiskers: Länge: Max./Min Wert, aber beschränkt durch das 1,5-fache des Quartilsabstands (falls größter/kleinster Wert größeren/kleineren Abstand von Box: Länge Whiskers durch größten/kleinsten Wert innerhalb dieser Schranken)
- Ausreißer: Alle Objekte außerhalb der Whisker-Grenzen

```r
boxplot(AusgSchuhe ~ Geschlecht,
        col=c("mistyrose", "lightblue"),
        data=MyData, main="", las=2)
```



```
summary(MyData)

##     Jahrgang      X               Alter         Groesse      Geschlecht     AlterV
##  Min.   :2014   Mode:logical   Min.   : 2   Min.   :150.0   Frau:543   Min.   :38.00
##  1st Qu.:2015   NA's:939       1st Qu.:20   1st Qu.:167.0   Mann:396   1st Qu.:50.00
##  Median :2016                  Median :21   Median :173.0              Median :54.00
##  Mean   :2016                  Mean   :22   Mean   :173.5              Mean   :54.41
##  3rd Qu.:2016                  3rd Qu.:23   3rd Qu.:180.0              3rd Qu.:58.00
##  Max.   :2017                  Max.   :37   Max.   :198.0              Max.   :87.00
##  NA's   :79                                                            NA's   :1
##      AlterM         GroesseV        GroesseM       Geschwister        Farbe        AusgKomm
##  Min.   :37.00   Min.   :157.0   Min.   : 76.0   Min.   :0.000   blau   : 42   Min.   :   0.0
##  1st Qu.:48.00   1st Qu.:175.0   1st Qu.:162.2   1st Qu.:1.000   gelb   : 10   1st Qu.: 200.0
##  Median :51.00   Median :180.0   Median :167.0   Median :1.000   rot    : 29   Median : 360.0
##  Mean   :51.69   Mean   :179.3   Mean   :166.5   Mean   :1.511   schwarz:475   Mean   : 464.2
##  3rd Qu.:55.00   3rd Qu.:183.0   3rd Qu.:170.0   3rd Qu.:2.000   silber :119   3rd Qu.: 600.0
##  Max.   :70.00   Max.   :204.0   Max.   :192.0   Max.   :9.000   weiss  :261   Max.   :5000.0
##  NA's   :1       NA's   :17      NA's   :13                      weiß   :  3   NA's   :2
##    AnzSchuhe         AusgSchuhe          Essgewohnheiten Raucher       NoteMathe
##  Min.   :  1.00   Min.   :   0.0   carnivor     :665    ja  :145   Min.   :1.000
##  1st Qu.:  8.00   1st Qu.: 120.0   fruktarisch  :  3    nein:586   1st Qu.:2.300
##  Median : 15.00   Median : 200.0   pescetarisch: 36    NA's:208   Median :3.300
##  Mean   : 21.11   Mean   : 278.7   vegan        :  4               Mean   :3.257
##  3rd Qu.: 30.00   3rd Qu.: 350.0   vegetarisch  : 26               3rd Qu.:4.000
##  Max.   :275.00   Max.   :3500.0   NA's         :205               Max.   :5.000
##                   NA's   :1                                        NA's   :227
##          MatheZufr    Studiengang
##  unzufrieden   :258   BW  :217
##  geht so       :193   ET  :  1
##  zufrieden     :159   IM  :153
##  sehr zufrieden:118   Inf : 57
##  NA's          :211   WI  :129
##                       NA's:382
##
```

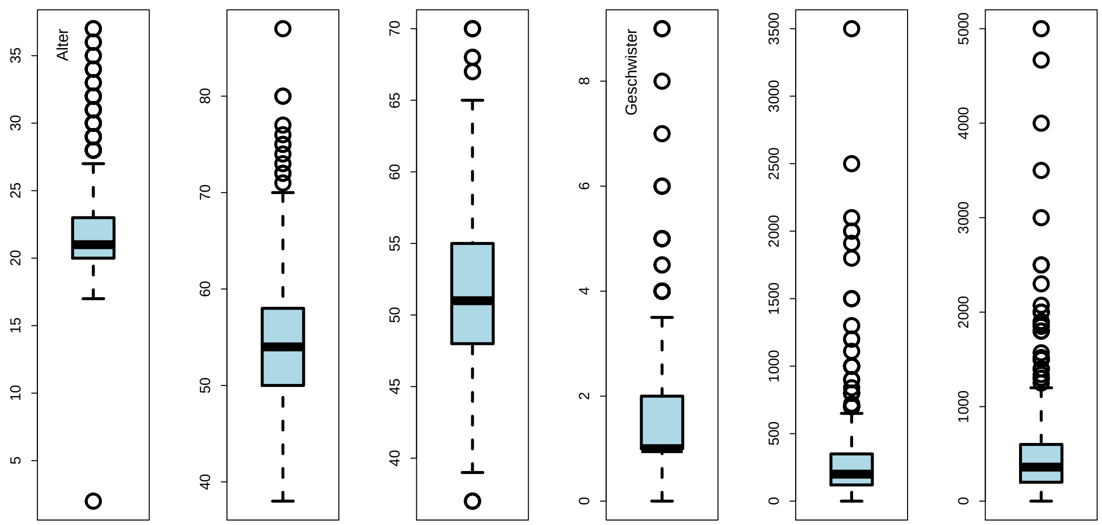
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Dateninspektion

Statistik
Etschberger – SS2017

Boxplots

```
for(attribute in c("Alter", "AlterV", "AlterM", "Geschwister",
                   "AusgSchuhe", "AusgKomm")) {
  data=MyData[, attribute]
  boxplot(data, # all rows, column of attribute
          col="lightblue",      # fill color
          lwd=3,                # line width
          cex=2,                 # character size
          oma=c(1,1,2,1)
          )
  text(0.7,max(data), attribute, srt=90, adj=1)
}
```



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Konzentrationsmaße

- Gegeben: kardinale Werte $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$
- **Achtung!** Die Werte <u>müssen</u> aufsteigend sortiert werden!
- Lorenzkurve:

> Wieviel Prozent der Merkmalssumme entfällt auf die x Prozent kleinsten Merkmalsträger?

- **Beispiel:** Die 90 % ärmsten besitzen 20 % des Gesamtvermögens.
- Streckenzug: $(0{,}0),\ (u_1, v_1),\ \ldots,\ (u_n, v_n) = (1{,}1)$ mit

$$v_k = \text{Anteil der } k \text{ kleinsten MM-Träger an der MM-Summe} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$u_k = \text{Anteil der } k \text{ kleinsten an der Gesamtzahl der MM-Träger} = \frac{k}{n}$$

Lorenzkurve: Beispiel

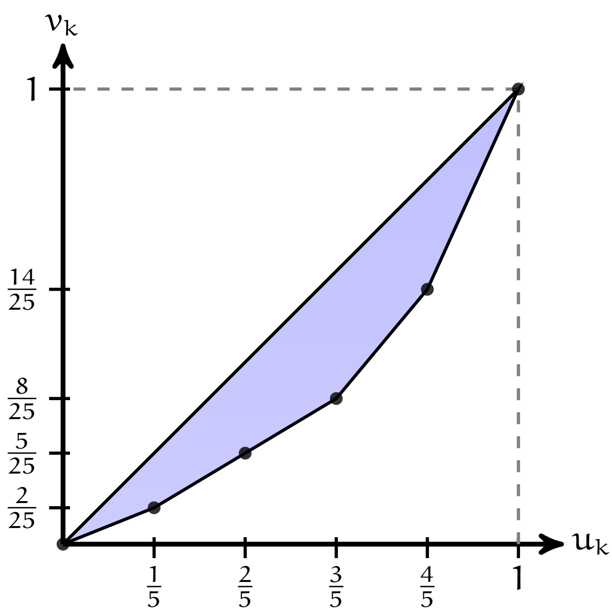
Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Markt mit fünf Unternehmen; Umsätze: 6, 3, 11, 2, 3 (Mio. €)

$$\Rightarrow n = 5, \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = 25$$

k	1	2	3	4	5
x_k	2	3	3	6	11
p_k	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$
v_k	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{14}{25}$	1
u_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1



Lorenzkurve

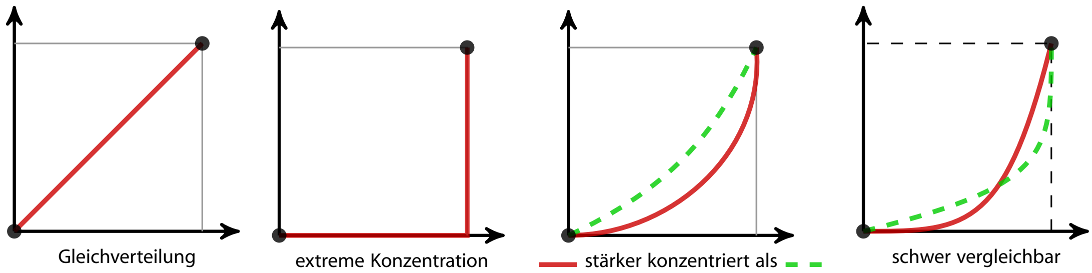
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Knickstellen:

- Bei i-tem Merkmalsträger $\Longleftrightarrow$ $x_{i+1} > x_i$
- Empirische Verteilungsfunktion liefert Knickstellen:

a_j	2	3	6	11
$h(a_j)$	1	2	1	1
$f(a_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$F(a_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Vergleich von Lorenzkurven:

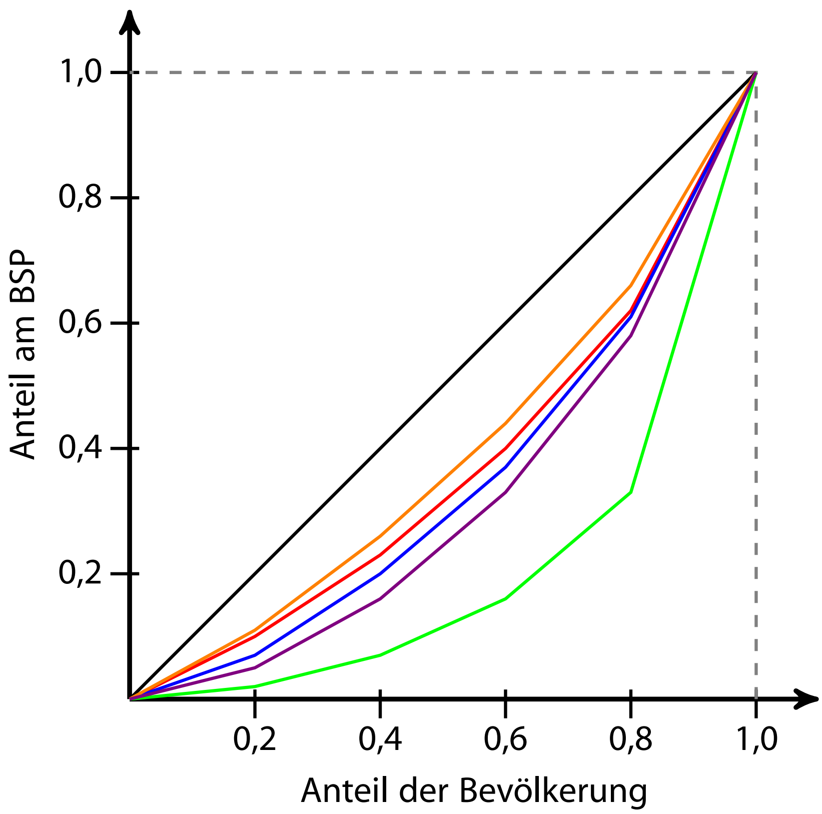


Lorenzkurve: Beispiel Bevölkerungsanteil gegen BSP

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Bangladesch
Brasilien
Deutschland
Ungarn
USA

(Stand 2000)



Gini-Koeffizient

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Numerisches Maß der Konzentration: Gini-Koeffizient G

$$G = \frac{\text{Fläche zwischen } 45^\circ\text{-Linie und L}}{\text{Fläche unter } 45^\circ\text{-Linie}} =$$

- Aus den Daten:

$$G = \frac{2 \sum_{i=1}^{n} i\,p_i - (n+1)}{n} \quad \text{wobei} \quad p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Problem: $G_{\max} = \frac{n-1}{n}$

➠ Normierter Gini-Koeffizient:

$$G_* = \frac{n}{n-1} \cdot G \in [0; 1]$$

Gini-Koeffizient: Beispiel

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel:

i	1	2	3	4	$\sum$
x_i	1	2	2	15	20
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{15}{20}$	1

$$G = \frac{2 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot \frac{15}{20}\right) - (4+1)}{4} = 0{,}525$$

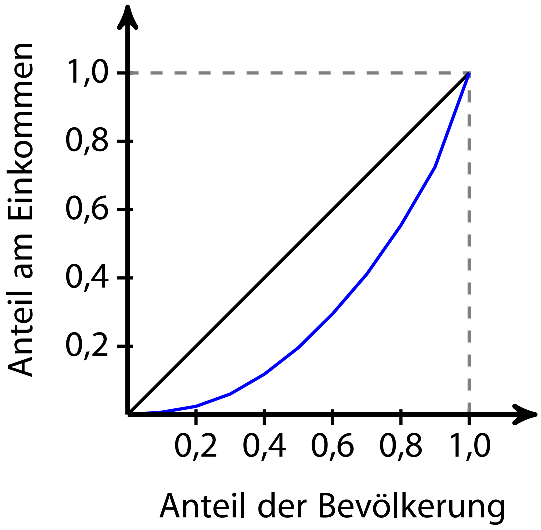
Mit $G_{\max} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75$ folgt

$$G_* = \frac{4}{4-1} \cdot 0{,}525 = 0{,}7$$

Konzentrationsmaße: Beispiel

Armutsbericht der Bundesregierung 2008

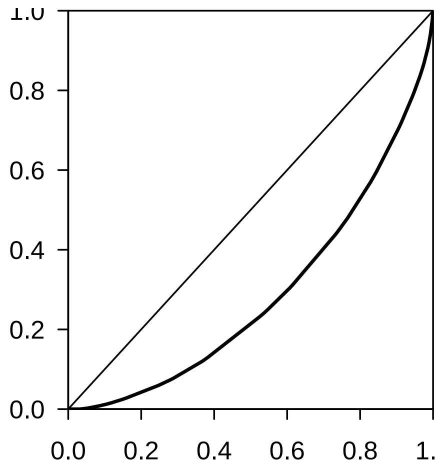
- Verteilung der Bruttoeinkommen in Preisen von 2000
- aus unselbständiger Arbeit der Arbeitnehmer/-innen insgesamt

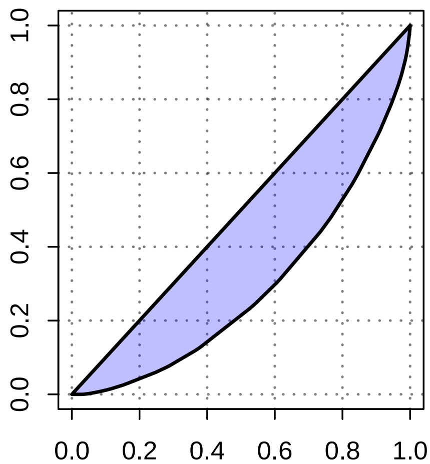


	2002	2003	2004	2005
Arithmetisches Mittel	24.873	24.563	23.987	23.648
Median	21.857	21.531	20.438	20.089
Gini-Koeffizient	0,433	0,441	0,448	0,453

Lorenzkurve mit R


```r
require(ineq) # inequality Paket
Lorenz = Lc(na.exclude(MyData$AusgSchuhe))
   plot(Lorenz, xlab="", ylab="", main="") # Standard plot
   plot(c(0,1), c(0,1), type="n", # bisschen netter
       panel.first=grid(lwd=1.5, col=rgb(0,0,0,1/2)),
       xlab="", main="", ylab="")
   polygon(Lorenz$p, Lorenz$L, density=-1, col=rgb(0,0,1,1/4), lwd=2)
```






```r
Gini(na.exclude(AusgSchuhe)) # Gini-Koeffizient

## [1] 0.4277039
```

Weitere Konzentrationsmaße

- Konzentrationskoeffizient:

$$CR_g = \text{Anteil, der auf die } g \text{ größten entfällt} = \sum_{i=n-g+1}^{n} p_i = 1 - v_{n-g}$$

- Herfindahl-Index:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \qquad (\in [\tfrac{1}{n}; 1])$$

Es gilt: $H = \frac{1}{n}(V^2 + 1)$ bzw. $V = \sqrt{n \cdot H - 1}$

- Exponentialindex:

$$E = \prod_{i=1}^{n} p_i^{p_i} \qquad (\in [\tfrac{1}{n}; 1]) \qquad \text{wobei} \qquad 0^0 = 1$$

- Im Beispiel mit $x = (1, 2, 2, 15)$:

$$CR_2 = \frac{17}{20} = 0{,}85$$

$$H = \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \dots + \left(\frac{15}{20}\right)^2 = 0{,}59$$

$$E = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{20}} \cdots \left(\frac{15}{20}\right)^{\frac{15}{20}} = 0{,}44$$

Auswertungsmethoden für zweidimensionale Daten

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Zweidimensionale Urliste

Urliste vom Umfang n zu **zwei** Merkmalen X und Y:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \dots, \quad (x_n, y_n)$$

Kontingenztabelle:

Sinnvoll bei wenigen Ausprägungen bzw. bei klassierten Daten.

	Ausprägungen von Y			
Ausprägungen von X	b_1	b_2	$\dots$	b_l
a_1	h_{11}	h_{12}	$\dots$	h_{1l}
a_2	h_{21}	h_{22}	$\dots$	h_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_k	h_{k1}	h_{k2}	$\dots$	h_{kl}

Kontingenztabelle

Unterscheide:

- **Gemeinsame Häufigkeiten:**

$$h_{ij} = h(a_i, b_j)$$

- **Randhäufigkeiten:**

$$h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \qquad \text{und} \qquad h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$$

- **Bedingte (relative) Häufigkeiten:**

$$f_1(a_i \mid b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}} \qquad \text{und} \qquad f_2(b_j \mid a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}}$$

Häufigkeiten

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel: 400 unfallbeteiligte Autoinsassen:

	leicht verletzt ($= b_1$)	schwer verletzt ($= b_2$)	tot ($= b_3$)	
angegurtet ($= a_1$)	264 ($= h_{11}$)	90 ($= h_{12}$)	6 ($= h_{13}$)	360 ($= h_{1\cdot}$)
nicht angegurtet ($= a_2$)	2 ($= h_{21}$)	34 ($= h_{22}$)	4 ($= h_{23}$)	40 ($= h_{2\cdot}$)
	266 ($= h_{\cdot 1}$)	124 ($= h_{\cdot 2}$)	10 ($= h_{\cdot 3}$)	400 ($= n$)

$f_2(b_3 \mid a_2) = \frac{4}{40} = 0{,}1$ (10 % der nicht angegurteten starben.)

$f_1(a_2 \mid b_3) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ (40 % der Todesopfer waren nicht angegurtet.)

Streuungsdiagramm

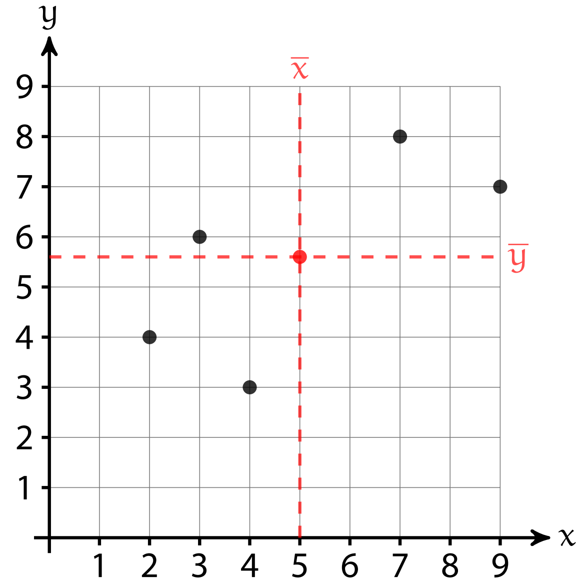
Streuungsdiagramm sinnvoll bei vielen verschiedenen Ausprägungen (z.B. stetige Merkmale)

➠ Alle (x_i, y_i) sowie $(\bar{x}, \bar{y})$ in Koordinatensystem eintragen.

Beispiel:

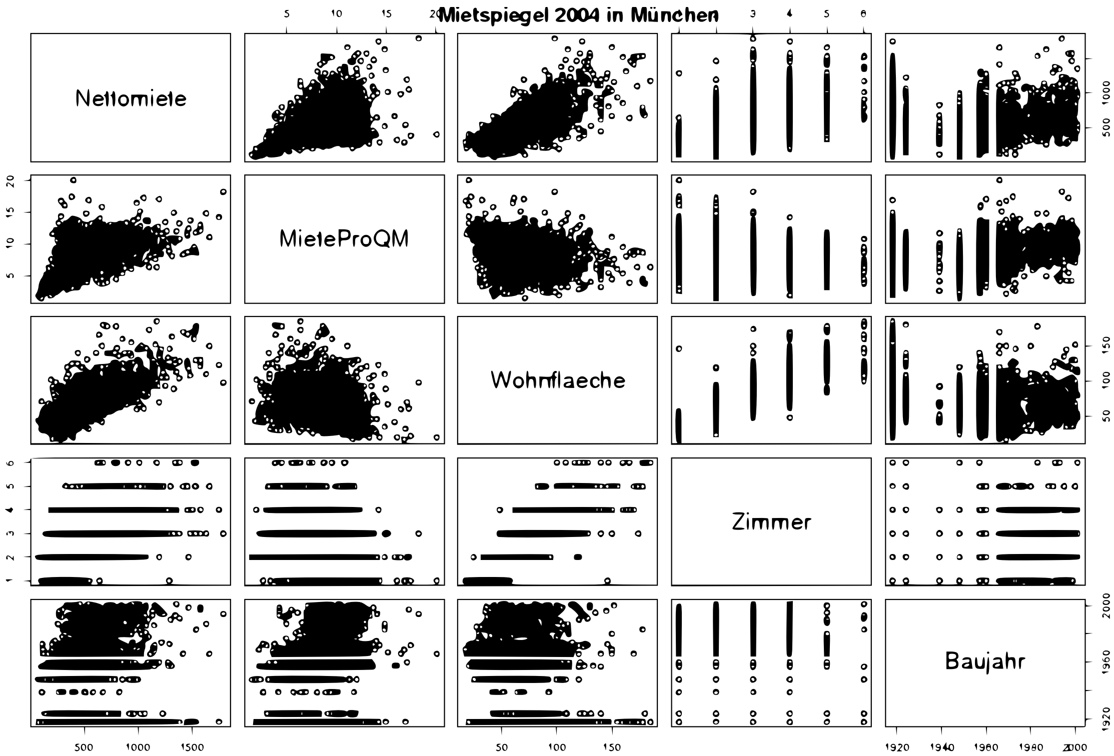
i	1	2	3	4	5	$\sum$
x_i	2	4	3	9	7	25
y_i	4	3	6	7	8	28

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{25}{5} = 5$$
$$\bar{y} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel Streuungsdiagramm

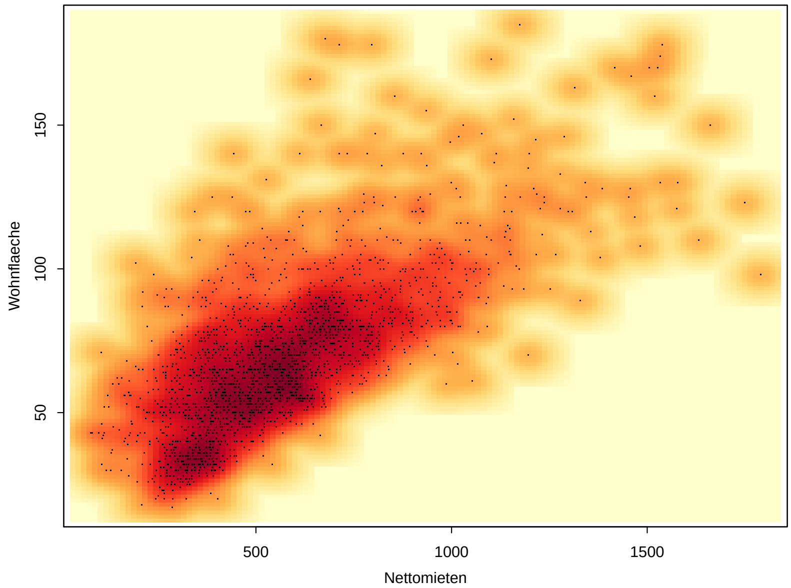


(Datenquelle: Fahrmeir u. a., (2009))

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel Streuungsdiagramm

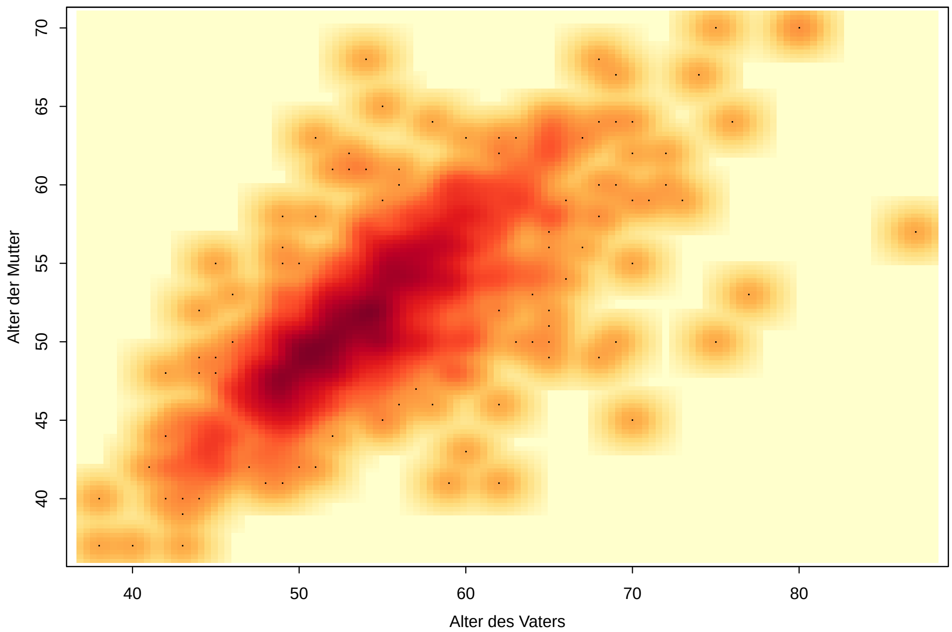
```r
if (!require("RColorBrewer")) {
install.packages("RColorBrewer")
library(RColorBrewer)
}
mieten <- read.table('https://goo.gl/yzJMJF', header=TRUE, sep='\t',
                    check.names=TRUE, fill=TRUE, na.strings=c('',''))
x <- cbind(Nettomieten=mieten$nm, Wohnflaeche=mieten$wfl)

library("geneplotter")  ## from BioConductor
smoothScatter(x, nrpoints=Inf,
              colramp=colorRampPalette(brewer.pal(9,"YlOrRd")),
              bandwidth=c(30,3))
```



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel Streuungsdiagramm

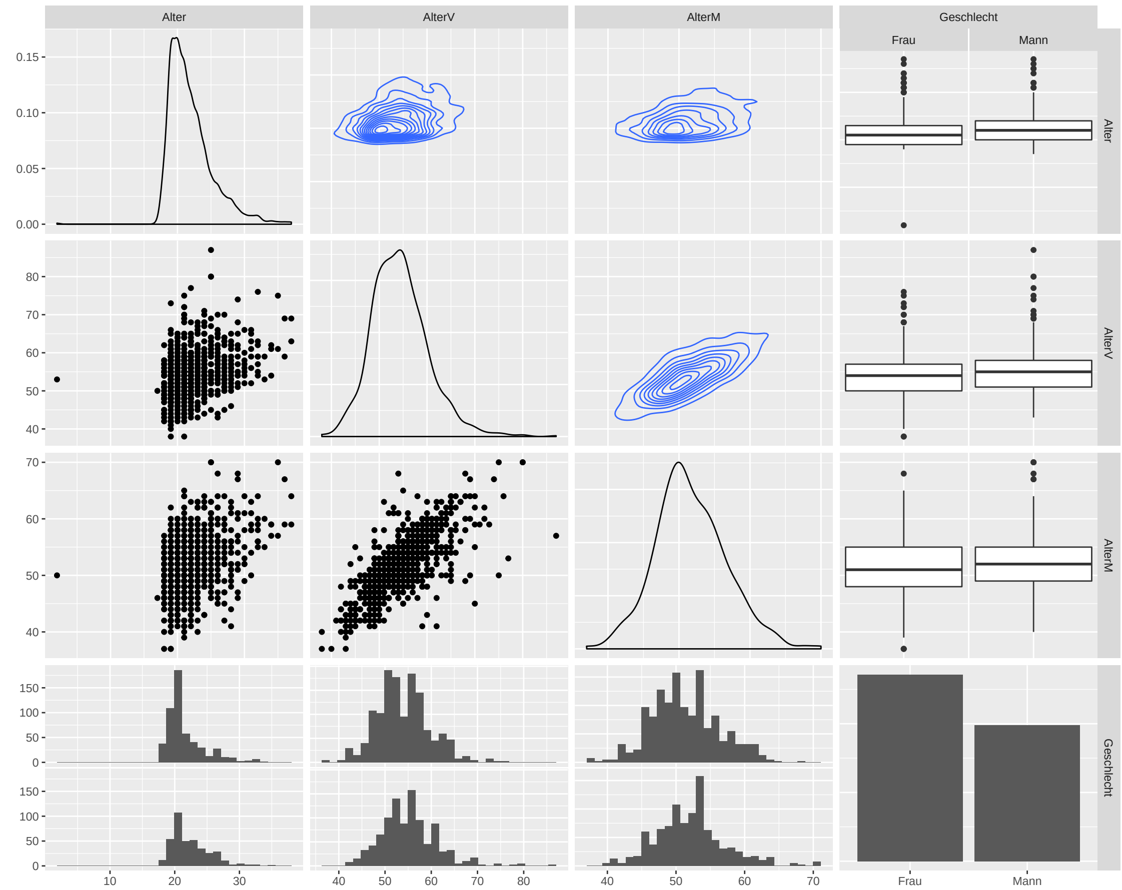
```r
x = cbind("Alter des Vaters"=AlterV, "Alter der Mutter"=AlterM)
require("geneplotter") ## from BioConductor
smoothScatter(x, colramp=colorRampPalette(brewer.pal(9,"YlOrRd")) )
```



Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

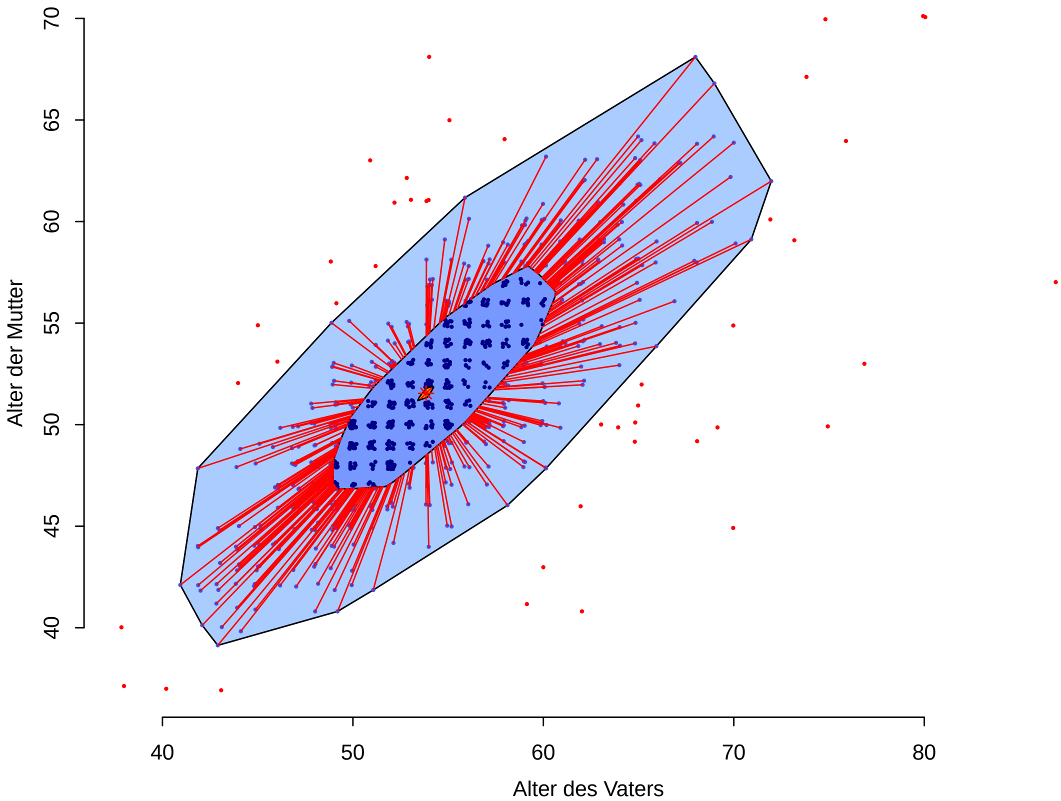
```r
require(GGally)
ggpairs(MyData[, c("Alter", "AlterV", "AlterM", "Geschlecht")],
        upper = list(continuous = "density", combo = "box"),
       color='Geschlecht', alpha=0.5)
```



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Bagplot: Boxplot in 2 Dimensionen

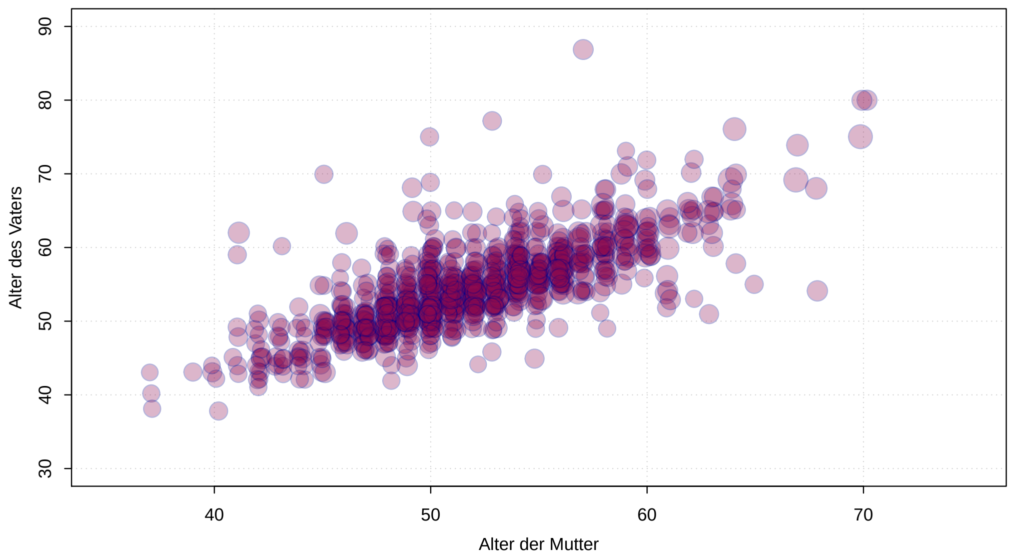
```r
require(aplpack)
bagplot(jitter(AlterV), jitter(AlterM), xlab="Alter des Vaters", ylab="Alter der Mutter")

## [1] "Warning: NA elements have been exchanged by median values!!"
```



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Bubbleplot: 3 metrische Variablen


```
require(DescTools)
My.ohne.NA = na.exclude(MyData[,c("AlterM", "AlterV", "Alter")])
with(My.ohne.NA, {
  Alter.skaliert = (Alter-min(Alter))/(max(Alter)-min(Alter))
  PlotBubble(jitter(AlterM), jitter(AlterV), Alter.skaliert,
             col=SetAlpha("deeppink4",0.3),
             border=SetAlpha("darkblue",0.3),
             xlab="Alter der Mutter", ylab="Alter des Vaters",
             panel.first=grid(),
             main="")
  })
```



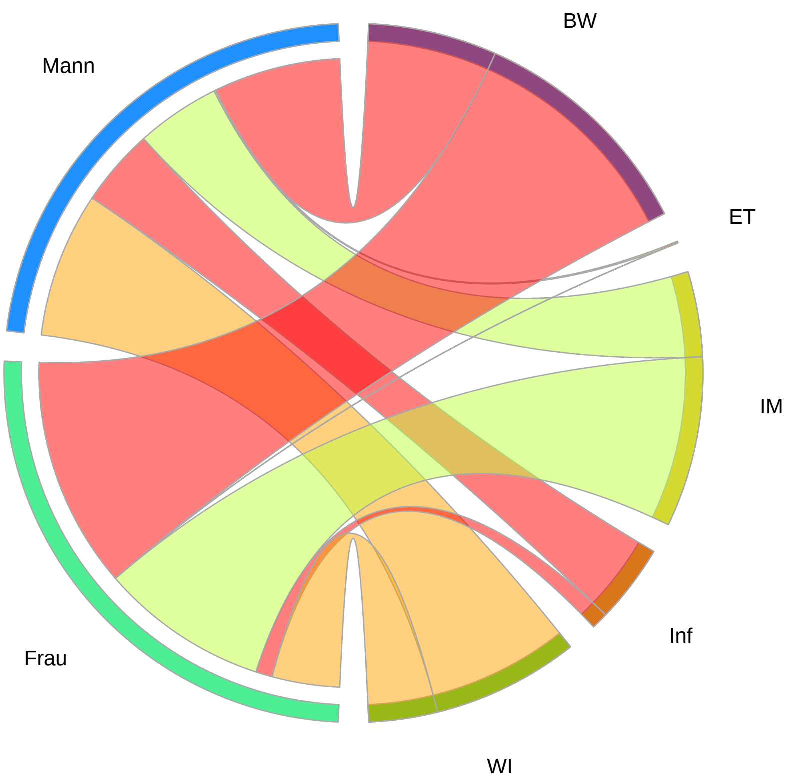
Größe der Blasen: Alter zwischen 0 (Jüngster) und 1 (Ältester)

Circular Plots: Assoziationen

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

```
require(DescTools)
with(MyData, {
PlotCirc(table(Studiengang, Geschlecht),
acol=c("dodgerblue","seagreen2","limegreen","olivedrab2","goldenrod2","tomato2"),
rcol=SetAlpha(c("red","orange","olivedrab1"), 0.5)
)})
```



Korrelationsrechnung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Frage: Wie stark ist der Zusammenhang zwischen X und Y?
- Dazu: Korrelationskoeffizienten
- Verschiedene Varianten: Wahl abhängig vom Skalenniveau von X und Y:

	Skalierung von Y		
Skalierung von X	kardinal	ordinal	nominal
kardinal	Bravais-Pearson-Korrelations-koeffizient		
ordinal		Rangkorrelations-koeffizient von Spearman	
nominal			Kontingenz-koeffizient

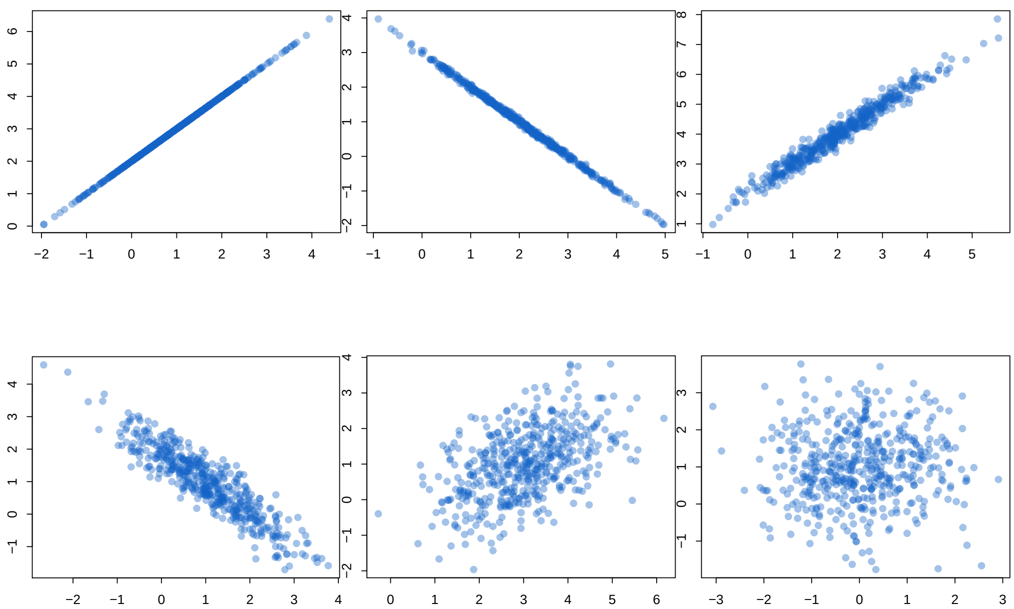
Korrelationskoeffizient von Bravais und Pearson

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient
Voraussetzung: X, Y kardinalskaliert

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}} \in [-1;+1]$$



Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Im Beispiel:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	4	4	16	8
2	4	3	16	9	12
3	3	6	9	36	18
4	9	7	81	49	63
5	7	8	49	64	56
$\sum$	25	28	159	174	157

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 25/5 = 5 \qquad \bar{y} = 28/5 = 5{,}6$$

$$r = \frac{157 - 5 \cdot 5 \cdot 5{,}6}{\sqrt{159 - 5 \cdot 5^2}\sqrt{174 - 5 \cdot 5{,}6^2}} = 0{,}703$$

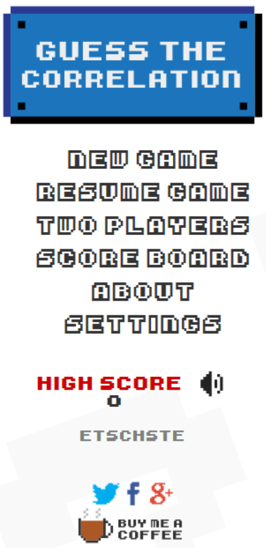
(deutliche positive Korrelation)

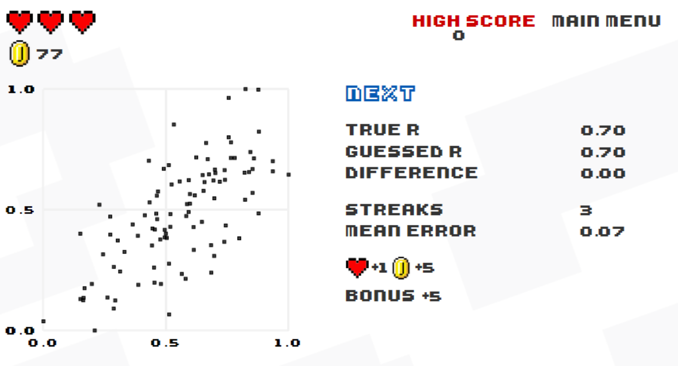
Guess The Correlation

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

`guessthecorrelation.com`





Go for the Highscore!

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

- Voraussetzungen: X, Y (mindestens) ordinalskaliert, Ränge eindeutig (keine Doppelbelegung von Rängen)
- Vorgehensweise:
  1. Rangnummern R_i (X) bzw. R_i' (Y) mit $R_i^{(\prime)} = 1$ bei größtem Wert usw.
  2. Berechne

$$r_{SP} = 1 - \frac{6 \sum\limits_{i=1}^{n} (R_i - R_i')^2}{(n-1)\, n\, (n+1)} \in [-1; +1]$$

- Hinweise:
  - $r_{SP} = +1$ wird erreicht bei $R_i = R_i'$ $\quad \forall i = 1, \ldots, n$
  - $r_{SP} = -1$ wird erreicht bei $R_i = n + 1 - R_i'$ $\quad \forall i = 1, \ldots, n$
- Falls Ränge nicht eindeutig: Bindungen, dann Berechnung von r_{SP} über Ränge und Formel des Korr.-Koeff. von Bravais-Pearson

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Im Beispiel:

x_i	R_i	y_i	R_i'
2	5	4	4
4	3	3	5
3	4	6	3
9	1	7	2
7	2	8	1

$$r_{SP} = 1 - \frac{6 \cdot [(5-4)^2 + (3-5)^2 + (4-3)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2]}{(5-1) \cdot 5 \cdot (5+1)} = 0{,}6$$

Kontingenzkoeffizient

- Gegeben: Kontingenztabelle mit k Zeilen und l Spalten (vgl. hier)
- Vorgehensweise:
  ① Ergänze Randhäufigkeiten

$$h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \qquad \text{und} \qquad h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$$

  ② Berechne theoretische Häufigkeiten

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$$

  ③ Berechne

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$$

χ^2 hängt von n ab! $(h_{ij} \mapsto 2 \cdot h_{ij} \Rightarrow \chi^2 \mapsto 2 \cdot \chi^2)$

Kontingenzkoeffizient

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

④ **Kontingenzkoeffizient:**

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \quad \in [0; K_{\text{max}}]}$$

wobei

$$K_{\text{max}} = \sqrt{\frac{M-1}{M}} \qquad \text{mit} \qquad M = \min\{k, l\}$$

⑤ **Normierter Kontingenzkoeffizient:**

$$\boxed{K_* = \frac{K}{K_{\text{max}}} \quad \in [0; 1]}$$

$K_* = +1 \iff$
bei Kenntnis von x_i kann y_i erschlossen werden u.u.

Kontingenzkoeffizient

Beispiel

X : Staatsangehörigkeit (d,a)
Y : Geschlecht (m,w)

h_{ij}	m	w	$h_{i\cdot}$
d	30	30	60
a	10	30	40
$h_{\cdot j}$	40	60	100

$\Rightarrow$

$\tilde{h}_{ij}$	m	w
d	24	36
a	16	24

wobei $\tilde{h}_{11} = \frac{60\cdot 40}{100} = 24$ usw.

$$\chi^2 = \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(30-36)^2}{36} + \frac{(10-16)^2}{16} + \frac{(30-24)^2}{24} = 6{,}25$$

$$K = \sqrt{\frac{6{,}25}{100+6{,}25}} = 0{,}2425; \qquad M = \min\{2,2\} = 2; \qquad K_{max} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = 0{,}7071$$

$$K_* = \frac{0{,}2425}{0{,}7071} = 0{,}3430$$

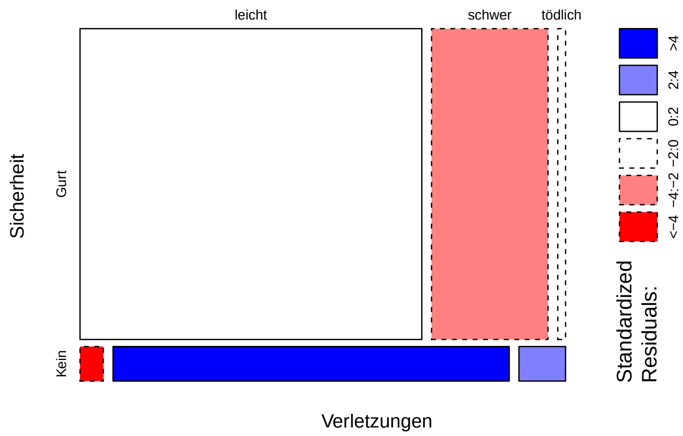
Graphische Repräsentation von Kontingenztabellen

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel Autounfälle

	Verletzung			
	leicht	schwer	tödlich	
angegurtet	264	90	6	360
nicht angegurtet	2	34	4	40
	266	124	10	400



Mosaikplot Autounfälle

Preisindizes

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Preismesszahl: Misst Preisveränderung eines einzelnen Gutes:

$$\frac{\text{Preis zum Zeitpunkt } j}{\text{Preis zum Zeitpunkt } i}$$

dabei: j: Berichtsperiode, i: Basisperiode

- Preisindex: Misst Preisveränderung mehrerer Güter (Aggregation von Preismesszahlen durch Gewichtung)
- Notation:

$$\begin{array}{rl} p_0(i): & \text{Preis des } i\text{-ten Gutes in Basisperiode } 0 \\ p_t(i): & \text{Preis des } i\text{-ten Gutes in Berichtsperiode } t \\ q_0(i): & \text{Menge des } i\text{-ten Gutes in Basisperiode } 0 \\ q_t(i): & \text{Menge des } i\text{-ten Gutes in Berichtsperiode } t \end{array}$$

Preisindizes

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Gleichgewichteter Preisindex:

$$P^G_{0t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_t(i)}{p_0(i)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_t(i)}{p_0(i)}\cdot g(i) \qquad \text{mit} \qquad g(i) = \frac{1}{n}$$

Nachteil: Auto und Streichhölzer haben gleiches Gewicht
Lösung: Preise mit Mengen gewichten!

- Preisindex von Laspeyres:

$$P^L_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i)q_0(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i)q_0(i)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_t(i)}{p_0(i)}\cdot g_0(i) \qquad \text{mit} \qquad g_0(i) = \frac{p_0(i)\,q_0(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_0(j)\,q_0(j)}$$

- Preisindex von Paasche:

$$P^P_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i)q_t(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i)q_t(i)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_t(i)}{p_0(i)}\cdot g_t(i) \qquad \text{mit} \qquad g_t(i) = \frac{p_0(i)\,q_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_0(j)\,q_t(j)}$$

Preisindizes: Beispiel

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Warenkorb: Kartoffeln und Kaffee

	1950		2013	
	Preis (€)	Menge pro Woche	Preis (€)	Menge pro Woche
1 kg Kartoffeln	0,04	3,58	1,10	1,25
100 g Kaffeebohnen	3,00	0,25	0,70	1,31

$$P^L_{1950,\,2013} = \frac{1{,}10 \cdot 3{,}58 + 0{,}70 \cdot 0{,}25}{0{,}04 \cdot 3{,}58 + 3{,}00 \cdot 0{,}25} \approx 4{,}6048$$

$$P^P_{1950,\,2013} = \frac{1{,}10 \cdot 1{,}25 + 0{,}70 \cdot 1{,}31}{0{,}04 \cdot 1{,}25 + 3{,}00 \cdot 1{,}31} \approx 0{,}5759$$

Weitere Preisindizes

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Idealindex von Fisher:

$$P^F_{0t} = \sqrt{P^L_{0t} P^P_{0t}}$$

Marshall-Edgeworth-Index:

$$P^{ME}_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i)[q_0(i) + q_t(i)]}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i)[q_0(i) + q_t(i)]}$$

Preisindex von Lowe:

$$P^{LO}_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i)q(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i)q(i)}$$

wobei $q(i) \triangleq \begin{cases} \text{Durchschn. Menge von} \\ \text{Gut } i \text{ über alle (bekannten)} \\ \text{Perioden} \end{cases}$

Weitere Preisindizes: Beispiel

Warenkorb: Kartoffeln und Kaffee

	1950		2013	
	Preis (€)	Menge pro Woche	Preis (€)	Menge pro Woche
1 kg Kartoffeln	0,04	3,58	1,10	1,25
100 g Kaffeebohnen	3,00	0,25	0,70	1,31

$$P^{F}_{1950,2013} \approx \sqrt{4{,}6048 \cdot 0{,}5759} = 1{,}6284$$

$$P^{ME}_{1950,2013} = \frac{1{,}10 \cdot (3{,}58 + 1{,}25) + 0{,}70 \cdot (0{,}25 + 1{,}31)}{0{,}04 \cdot (3{,}58 + 1{,}25) + 3{,}00 \cdot (0{,}25 + 1{,}31)} = 1{,}3143$$

$$P^{Lo}_{1950,2013} = \frac{1{,}10 \cdot 2{,}5 + 0{,}70 \cdot 0{,}75}{0{,}04 \cdot 2{,}5 + 3{,}00 \cdot 0{,}75} = 1{,}3936$$

Annahme bei P^{LO}: Durchschn. Mengen bei Kartoffeln bzw. Kaffebohnen von 1950 bis 2013 sind 2,5 bzw. 0,75.

Ausgangsdaten

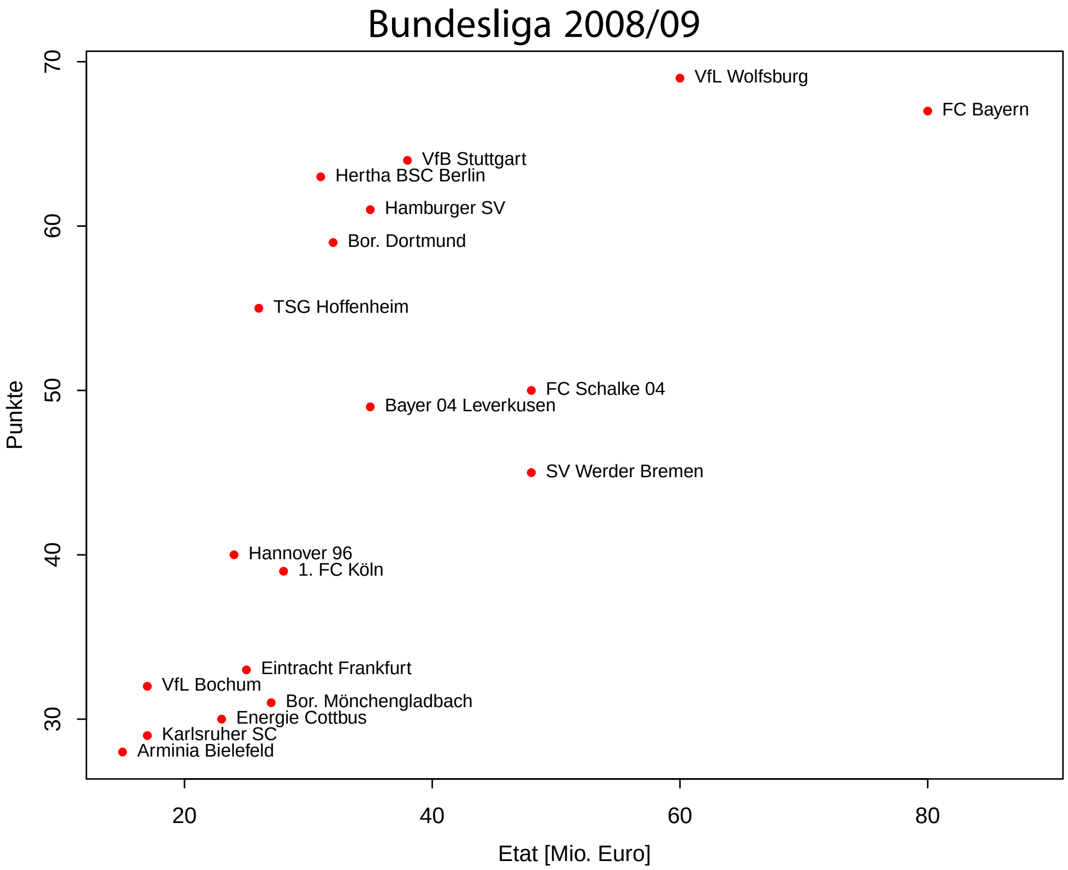
Bundesliga 2008/2009

- Gegeben: Daten zu den 18 Vereinen der ersten Bundesliga in der Saison 2008/09
- Merkmale: **Vereinssetat** für Saison (nur direkte Gehälter und Spielergehälter)
- und **Ergebnispunkte** in Tabelle am Ende der Saison

	Etat	Punkte
FC Bayern	80	67
VfL Wolfsburg	60	69
SV Werder Bremen	48	45
FC Schalke 04	48	50
VfB Stuttgart	38	64
Hamburger SV	35	61
Bayer 04 Leverkusen	35	49
Bor. Dortmund	32	59
Hertha BSC Berlin	31	63
1. FC Köln	28	39
Bor. Mönchengladbach	27	31
TSG Hoffenheim	26	55
Eintracht Frankfurt	25	33
Hannover 96	24	40
Energie Cottbus	23	30
VfL Bochum	17	32
Karlsruher SC	17	29
Arminia Bielefeld	15	28

(Quelle: Welt)

Darstellung der Daten in Streuplot



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Trend als lineares Modell

- Kann man die **Tabellenpunkte** näherungsweise über einfache Funktion **in Abhängigkeit des Vereinsetats** darstellen?
- Allgemein: Darstellung einer Variablen Y als Funktion von X:

$$y = f(x)$$

- Dabei:
  - X heißt Regressor bzw. unabhängige Variable
  - Y heißt Regressand bzw. abhängige Variable
- Wichtiger (und einfachster) Spezialfall: f beschreibt einen linearen Trend:

$$y = a + b\,x$$

- Dabei anhand der Daten zu schätzen: a (Achsenabschnitt) und b (Steigung)
- Schätzung von a und b: Lineare Regression

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Fehlerquadratsumme

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Pro Datenpunkt gilt mit Regressionsmodell:

$$y_i = a + bx_i + \epsilon_i$$

- Dabei: ϵ_i ist jeweils Fehler (der Grundgesamtheit),
- mit $e_i = y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)$: Abweichung (Residuen) zwischen gegebenen Daten der Stichprobe und durch Modell geschätzten Werten
- Modell gut wenn alle Residuen e_i zusammen möglichst klein
- Einfache Summe aber nicht möglich, denn e_i positiv oder negativ
- Deswegen: Summe der Quadrate von e_i
- Prinzip der kleinsten Quadrate: Wähle a und b so, dass

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \to \min$$

Beste Lösung

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Beste und eindeutige Lösung:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x}$$

- Regressionsgerade:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x$$

Bundesligabeispiel

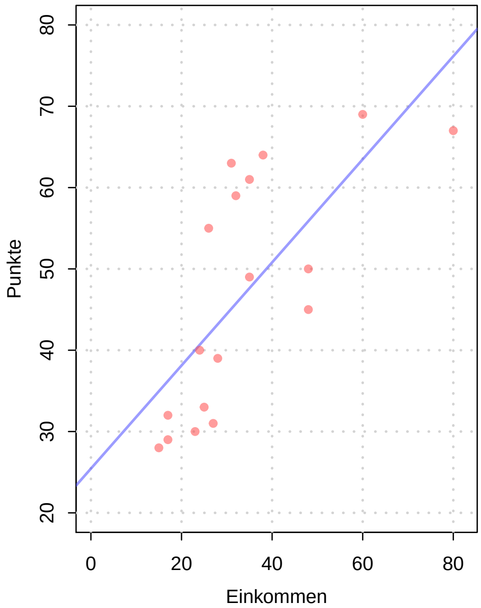
- Berechnung eines linearen Modells der Bundesligadaten
- dabei: Punkte $\hat{=}\, y$ und Etat $\hat{=}\, x$:

$\overline{x}$	33,83
$\overline{y}$	46,89
$\sum x_i^2$	25209
$\sum x_i y_i$	31474
n	18

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{31474 - 18 \cdot 33{,}83 \cdot 46{,}89}{25209 - 18 \cdot 33{,}83^2} \approx 0{,}634$$

$$\Rightarrow \hat{a} = 46{,}89 - \hat{b} \cdot 33{,}83 \approx 25{,}443$$

- Modell: $\hat{y} = 25{,}443 + 0{,}634 \cdot x$



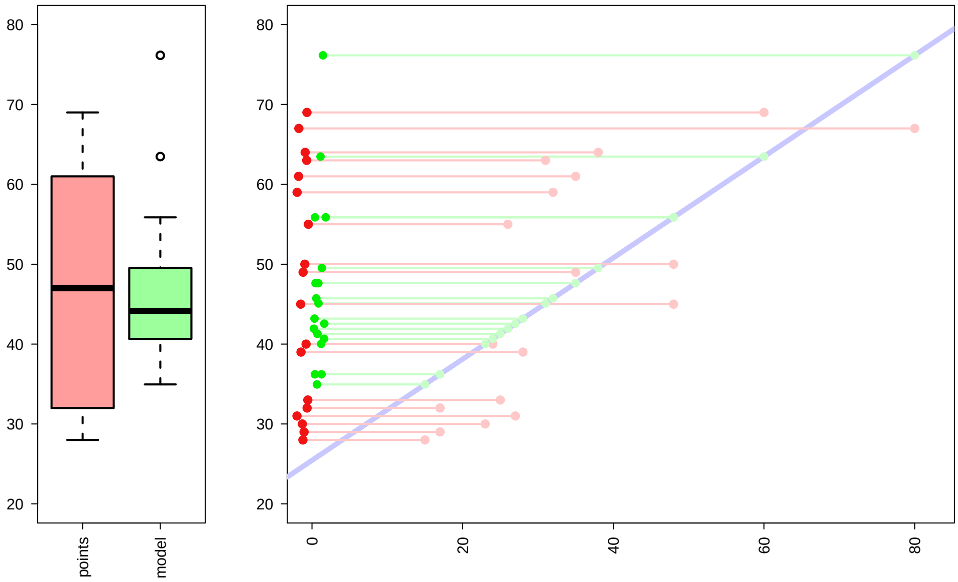
- Prognosewert für Etat $= 30$:

$$\hat{y}(30) = 25{,}443 + 0{,}634 \cdot 30 \approx 44{,}463$$

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Varianz und Information

- **Varianz** der Daten in abhängiger Variablen y_i als Repräsentant des **Information**sgehalts
- Ein Bruchteil davon kann in Modellwerten $\hat{y}_i$ abgebildet werden



- Empirische Varianz (mittlere quadratische Abweichung) für „rot“ bzw. „grün“ ergibt jeweils

$$\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(y_i - \overline{y})^2 \approx 200{,}77 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(\hat{y}_i - \overline{y})^2 \approx 102{,}78$$

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Determinationskoeffizient

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Gütemaß für die Regression: Determinationskoeffizient (Bestimmtheitskoeffizient):

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2} = r^2 \in [0;1]$$

- Mögliche Interpretation von R^2:
  Durch die Regression erklärter Anteil der Varianz
- $R^2 = 0$ wird erreicht wenn X, Y unkorreliert
  $R^2 = 1$ wird erreicht wenn $\hat{y}_i = y_i \; \forall i$ (alle Punkte auf Regressionsgerade)
- Im (Bundesliga-)Beispiel:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{18} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{18} (y_i - \bar{y})^2} \approx \frac{102{,}78}{200{,}77} \approx 51{,}19\,\%$$

Regression: 4 eindimensionale Beispiele

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Berühmte Daten aus den 1970er Jahren:

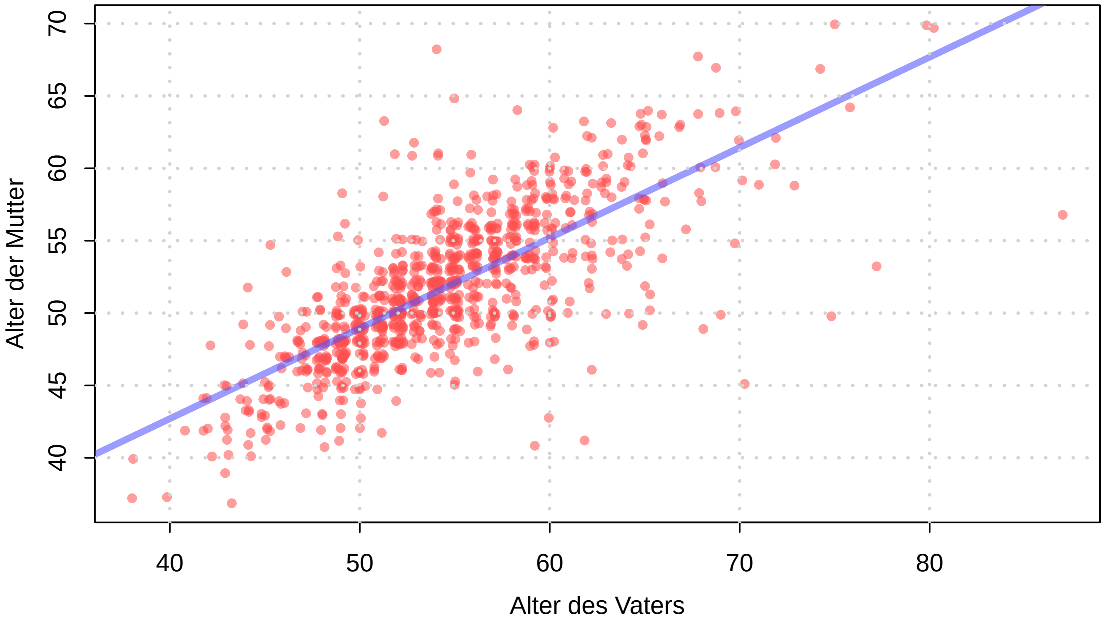
i	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}	y_{1i}	y_{2i}	y_{3i}	y_{4i}
1	10	10	10	8	8,04	9,14	7,46	6,58
2	8	8	8	8	6,95	8,14	6,77	5,76
3	13	13	13	8	7,58	8,74	12,74	7,71
4	9	9	9	8	8,81	8,77	7,11	8,84
5	11	11	11	8	8,33	9,26	7,81	8,47
6	14	14	14	8	9,96	8,10	8,84	7,04
7	6	6	6	8	7,24	6,13	6,08	5,25
8	4	4	4	19	4,26	3,10	5,39	12,50
9	12	12	12	8	10,84	9,13	8,15	5,56
10	7	7	7	8	4,82	7,26	6,42	7,91
11	5	5	5	8	5,68	4,74	5,73	6,89

(Quelle: Anscombe, (1973))

Beispieldaten

```r
meineRegression = lm(AlterM ~ AlterV)
meineRegression

plot(AlterV, AlterM,
     xlab="Alter des Vaters",
     ylab="Alter der Mutter")
abline(meineRegression)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = AlterM ~ AlterV)
##
## Coefficients:
## (Intercept)       AlterV
##      17.7196      0.6245
```



Cook's Distanz

- Oft Kritisch: Einzelne Punkte, die Modell stark beeinflussen
- Idee: Was würde sich ändern, wenn solche Punkte weggelassen würden?
- Cook-Distanz: Misst den Effekt eines gelöschten Objekts
- Formel für ein lineares Modell mit einem unabh. Merkmal:

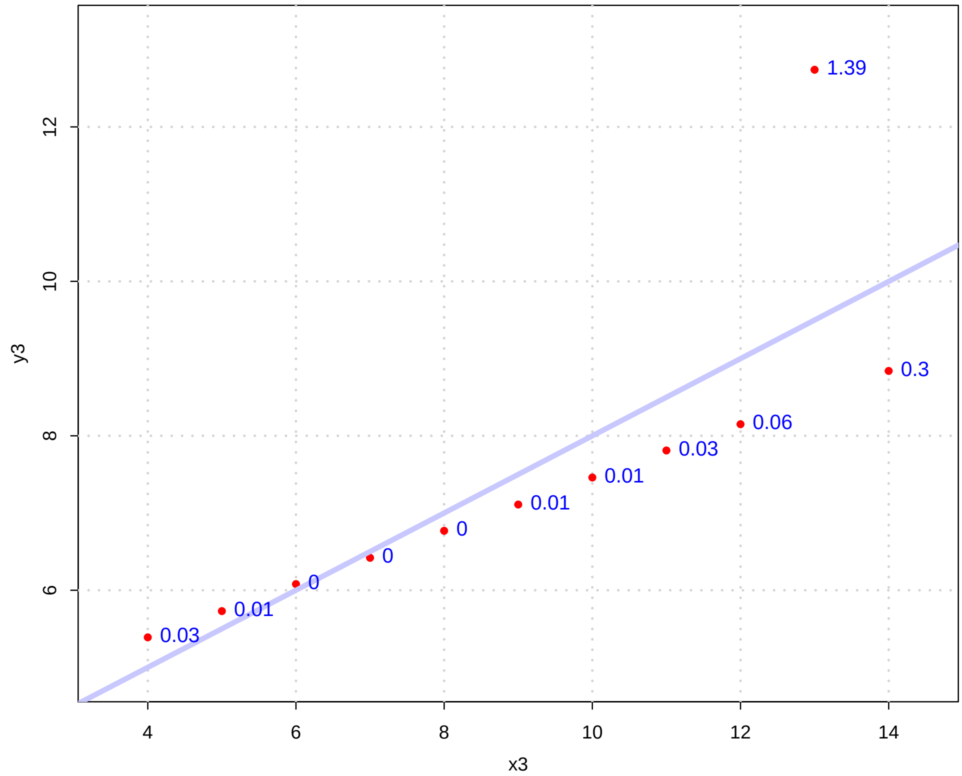
$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} (\hat{y}_j - \hat{y}_{j(\text{ohne } i)})^2}{\text{MSE}}$$

- Dabei bedeutet:
  - $\hat{y}_j$: Prognosewert des kompletten Modells für das j-te Objekt
  - $\hat{y}_{j(\text{ohne } i)}$: Prognosewert des Modells ohne Objekt i für das j-te Objekt
  - $\text{MSE} = \frac{1}{n} \cdot \sum (\hat{y}_i - y_i)^2$: Normierender Term (Schätzwert für Fehlerstreuung)

Ausreißer?

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

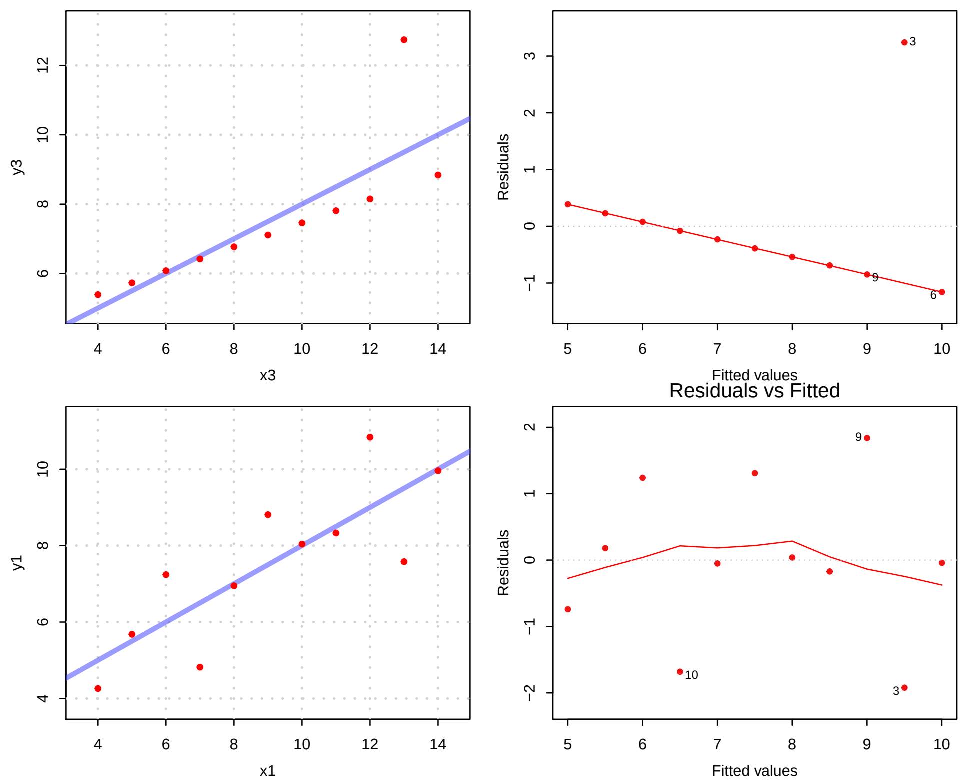
- Anscombe-Daten: Regressionsmodell Nr. 3
- Darstellung der Cook-Distanz neben Punkten
- Faustformel: Werte über 1 sollten genau untersucht werden



Residualanalyse

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

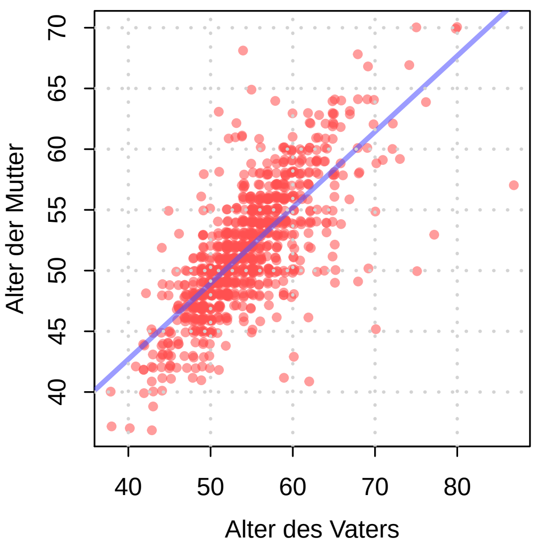
- Oft aufschlussreich: Verteilung der Residuen e_i
- Verbreitet: Graphische Darstellungen der Residuen
- Z.B.: e_i über $\hat{y}_i$

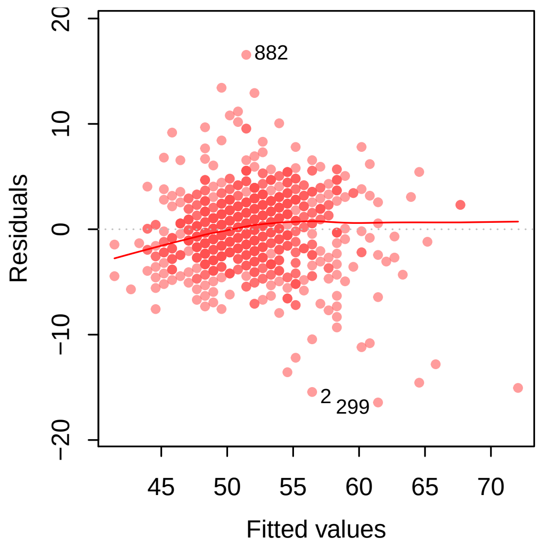


Residualanalyse

Wichtige Eigenschaften der Residuenverteilung

- Möglichst keine systematischen Muster
- Keine Änderung der Varianz in Abhängigkeit von $\hat{y}_i$ (Homoskedastizität)
- Nötig für inferentielle Analysen: Näherungsweise Normalverteilung der Residuen (q-q-plots)





Kausalität versus Korrelation

Exkurs: Kausalität vs. Korrelation

- Meist wichtig für sinnvolle Regressionsanalysen:
- Kausale Verbindung zwischen unabhängigem und abhängigem Merkmal
- Sonst bei Änderung der unabhängigen Variablen keine sinnvollen Prognosen möglich
- Oft: Latente Variablen im Hintergrund

Gliederung

1. Statistik: Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Induktive Statistik

4 Wahrscheinlichkeitstheorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter

Kombinatorik: Anzahl von Kombinationen bei Auswahl

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

2-mal Würfeln, das heißt Auswahl von $k = 2$ aus $n = 6$ Zahlen.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- mit WH, mit RF: alle Möglichkeiten, $6^2 = 36$
- ohne WH, mit RF: Diagonale entfällt, $36 - 6 = 30 = 6 \cdot 5 = \dfrac{6!}{(6-2)!}$
- ohne WH, ohne RF: Hälfte des letzten Ergebnisses: $\frac{30}{2} = 15 = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2}$
- mit WH, ohne RF: Letztes Ergebnis plus Diagonale, $15 + 6 = 21 = \binom{7}{2}$

Auswahl von k aus n Dingen	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Reihenfolge	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\dbinom{n+k-1}{k}$	$\dbinom{n}{k}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Zufallsvorgang: Geschehen mit ungewissem Ausgang, z.B. Münzwurf
- Elementarereignis ω: Ein möglicher Ausgang, z.B. „Kopf"
  Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus („Kopf" oder „Zahl")!
- Ergebnismenge Ω: Menge aller ω
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\Omega : \quad \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Ereignis A: Folgeerscheinung eines Elementarereignisses
- Formal:

$$A \subseteq \Omega$$

- Ereignisse schließen sich nicht gegenseitig aus!
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme $= 4$	$\{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$
B	Erste Zahl $= 2$	$\{(2,1),\ (2,2),\ \ldots,\ (2,6)\}$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$: Chance für das Eintreten von A
- Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Laplace Wahrscheinlichkeit und Urnenmodell

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\text{Augensumme} = 4: \quad A = \{(1{,}3),\ (2{,}2),\ (3{,}1)\}$$

$$|\Omega| = 36, \quad |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

- Urnenmodell: Ziehe n Objekte aus einer Menge mit N Objekten
  Anzahl Möglichkeiten:

  mit Zurücklegen: N^n
  ohne Zurücklegen: $N \cdot (N-1) \cdots (N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!}$

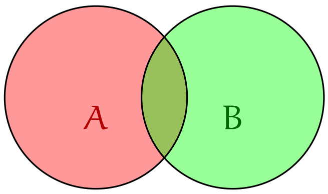
- **Beispiel:**
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gut gemischten 32-er Kartenblatt bei viermaligem Ziehen vier Asse zu bekommen?
  a) Ziehen mit Zurücklegen,
  b) Ziehen ohne Zurücklegen

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

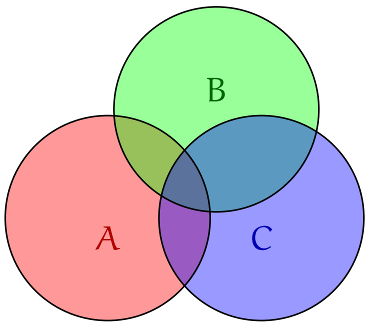
Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Wichtige Rechenregeln:



1. $P(A) \leqq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) =$
   $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

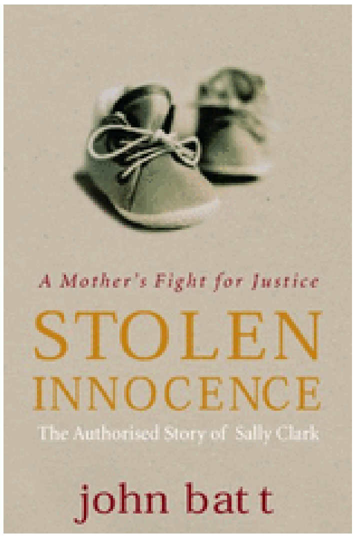


- **Beispiel:**

$$P(\text{„Augenzahl} \leqq 5\text{“}) = 1 - P(\text{„Augenzahl} = 6\text{“}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Beispiel Gegenereignis

Der Fall Sally Clark



- Sally Clarks Söhne Christopher und Harry sterben 1996 und 1997 beide kurz nach der Geburt an plötzlichem Kindstod.
- Kinderarzt: „Wahrscheinlich Mord, da 2 maliger plötzlicher Kindstod sehr unwahrscheinlich!“ (ohne konkrete Hinweise)
- Gerichtliche Untersuchung
- Hauptargument der Anklage gestützt durch Gerichtsgutachter Sir Roy Meadow (renommierter Facharzt für Kinderheilkunde): Wahrscheinlichkeit für plötzlichen Kindstod ist 1:8500, d.h. Wahrscheinlichkeit für 2 maliges Auftreten in einer Familie

$$p = \left(\frac{1}{8500}\right)^2 \approx 1 : 72\ 000\ 000$$

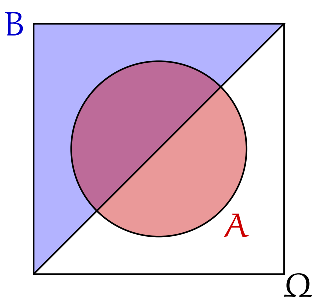
- Urteil: Doppelmord; Strafe: 2 mal lebenslang; Inhaftierung von Sally Clark 1999

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von A hängt von anderem Ereignis B ab. (B kann zeitlich vor A liegen, muss aber nicht!)
- **Beispiel:** Wahrscheinlichkeit für Statistiknote hängt von Mathenote ab.
- Formal:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- Im Venndiagramm:



Unabhängigkeit von Ereignissen

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- A, B unabhängig: Eintreten von A liefert keine Information über $P(B)$.
- Formal:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Bei Unabhängigkeit ist äquivalent dazu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\left.\begin{array}{ll} A: & \text{"`erster Würfel gleich 6"'} \\ B: & \text{"`zweiter Würfel gleich 6"'} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = P(A)$$

Zufallsvariablen

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Zufallsvariablen und Verteilungen

- Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen
- Formal: Zufallsvariable ist Abbildung von Ereignisraum in reelle Zahlen:

$$X: \ \Omega \to \mathbb{R}$$

- **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

Realisation: $\quad x = X(\omega)$

- **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

Wertebereich: $\quad X(\Omega) = \{x: \ x = X(\omega), \ \omega \in \Omega\}$

- **Beispiel:** Würfeln, X: Augenzahl, $X(\Omega) = \{1,2,\ldots,6\}$, $x = 4$ (z.B.)

$$P(X = 4) = \tfrac{1}{6}, \quad P(X \leqq 3) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

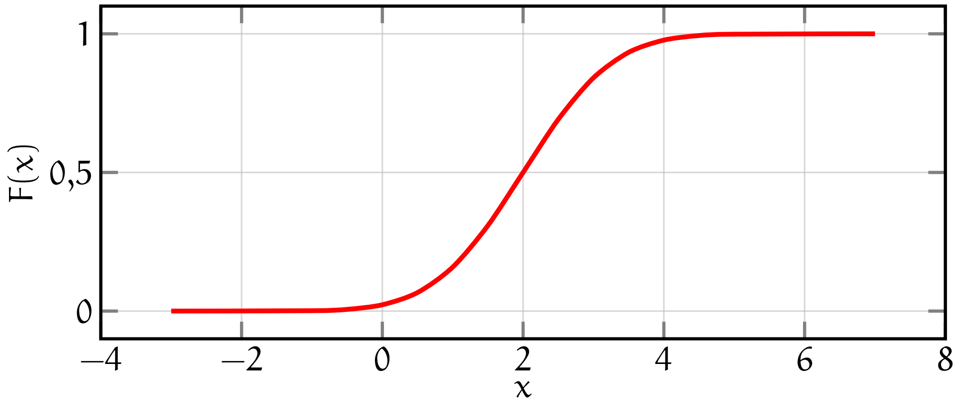
Verteilungsfunktion

- Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten zu Realisationen
- Formal:

$$F(x) = P(X \leqq x)$$

- Eigenschaften der Verteilungsfunktion:
  - $F(x) \in [0; 1]$
  - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$ mit $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
  - monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqq F(x_2)$
  - Es gilt:

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$$



Beispiel einer Verteilungsfunktion

Diskrete Zufallsvariablen

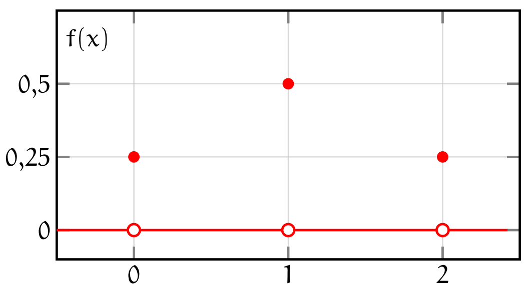
- X heißt diskret, wenn $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ endlich ist.
- Wahrscheinlichkeitsfunktion dann:

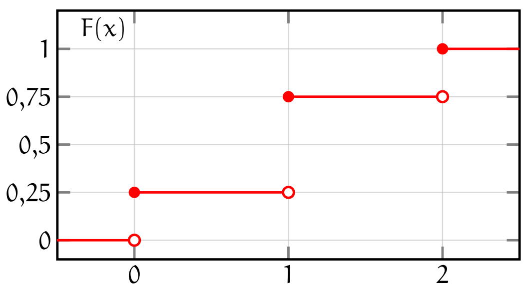
$$f(x) = P(X = x)$$

Beispiel: Münze 2 mal werfen; X: Anzahl "'Kopf"'

	(Z,Z)	$(Z,K),\ (K,Z)$	(K,K)
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{falls } 1 \leqq x < 2 \\ 1, & \text{falls } \quad x \geqq 2 \end{cases}$$





Binomialverteilung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- **Wiederholter** Zufallsvorgang
- n Durchführungen (jeweils unabhängig)
- Pro Durchführung: A oder $\bar{A}$ mit $P(A) = p$ ($\widehat{=}$ Ziehen mit Zurücklegen)
- Schreibe:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \end{cases}$$

- Dann gibt

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

  an, wie oft A eintritt.
- Gesucht: Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

Binomialverteilung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Herleitung:
  1) $P(X_i = 1) = P(A) = p,\ P(X_i = 0) = P(\bar{A}) = 1 - p$
  2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$ entspricht "'x mal Ereignis A und $n - x$ mal $\bar{A}$"'
     Wahrscheinlichkeit (bei Unabhängigkeit): $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
  3) Aber: Reihenfolge irrelevant! Anzahl Anordnungen: $\binom{n}{x}$

➠ Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, & \text{falls } x \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kurzschreibweise: $X \sim B(n;p)$
  X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
- Tabellen zeigen meist $F(x)$
- für $f(x)$ gilt: $f(x) = F(x) - F(x-1)$

$X \sim B(n, 0.25)$, Tabelle der Binomialverteilung $F(x) = P(X \leqslant x)$

$x \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.7500	0.5625	0.4219	0.3164	0.2373	0.1780	0.1335	0.1001	0.0751	0.0563	0.0422	0.0317	0.0238	0.0178	0.0134
1	1.0000	0.9375	0.8438	0.7383	0.6328	0.5339	0.4450	0.3671	0.3003	0.2440	0.1971	0.1584	0.1267	0.1010	0.0802
2		1.0000	0.9844	0.9492	0.8965	0.8306	0.7564	0.6786	0.6007	0.5256	0.4552	0.3907	0.3326	0.2811	0.2361
3			1.0000	0.9961	0.9844	0.9624	0.9295	0.8862	0.8343	0.7759	0.7133	0.6488	0.5843	0.5213	0.4613
4				1.0000	0.9990	0.9954	0.9871	0.9727	0.9511	0.9219	0.8854	0.8424	0.7940	0.7415	0.6865
5					1.0000	0.9998	0.9987	0.9958	0.9900	0.9803	0.9657	0.9456	0.9198	0.8883	0.8516
6						1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9965	0.9924	0.9858	0.9757	0.9617	0.9434
7							1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9827
8								1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9979	0.9958
9									1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
10										1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
11											1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.0100	0.0075	0.0056	0.0042	0.0032	0.0024	0.0018	0.0013	0.0010	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002
1	0.0635	0.0501	0.0395	0.0310	0.0243	0.0190	0.0149	0.0116	0.0090	0.0070	0.0055	0.0042	0.0033	0.0025	0.0020
2	0.1971	0.1637	0.1353	0.1114	0.0913	0.0745	0.0607	0.0492	0.0398	0.0321	0.0258	0.0208	0.0166	0.0133	0.0106
3	0.4050	0.3530	0.3057	0.2631	0.2252	0.1917	0.1624	0.1370	0.1150	0.0962	0.0802	0.0666	0.0551	0.0455	0.0375
4	0.6302	0.5739	0.5187	0.4654	0.4149	0.3674	0.3235	0.2832	0.2467	0.2138	0.1844	0.1583	0.1354	0.1153	0.0979
5	0.8104	0.7653	0.7175	0.6678	0.6172	0.5666	0.5168	0.4685	0.4222	0.3783	0.3372	0.2990	0.2638	0.2317	0.2026
6	0.9205	0.8929	0.8610	0.8251	0.7858	0.7436	0.6994	0.6537	0.6074	0.5611	0.5154	0.4708	0.4279	0.3869	0.3481
7	0.9729	0.9598	0.9431	0.9226	0.8982	0.8701	0.8385	0.8037	0.7662	0.7265	0.6852	0.6427	0.5998	0.5568	0.5143
8	0.9925	0.9876	0.9807	0.9713	0.9591	0.9439	0.9254	0.9037	0.8787	0.8506	0.8196	0.7860	0.7502	0.7126	0.6736
9	0.9984	0.9969	0.9946	0.9911	0.9861	0.9794	0.9705	0.9592	0.9453	0.9287	0.9092	0.8868	0.8616	0.8337	0.8034
10	0.9997	0.9994	0.9988	0.9977	0.9961	0.9936	0.9900	0.9852	0.9787	0.9703	0.9599	0.9472	0.9321	0.9145	0.8943
11	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9991	0.9983	0.9971	0.9954	0.9928	0.9893	0.9845	0.9784	0.9706	0.9610	0.9494
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9979	0.9966	0.9948	0.9922	0.9888	0.9842	0.9784
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9944	0.9918
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
17		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Binomialverteilung: Beispiel

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Beispiel

Aus einem 32-er Kartenblatt wird 3-mal eine Karte mit Zurücklegen gezogen.
Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal Herz zu ziehen?

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Karte Herz} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_i \sim B(1; \tfrac{8}{32})$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 \quad \Rightarrow \quad X \sim B(3; \tfrac{1}{4})$$

Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}1406$$

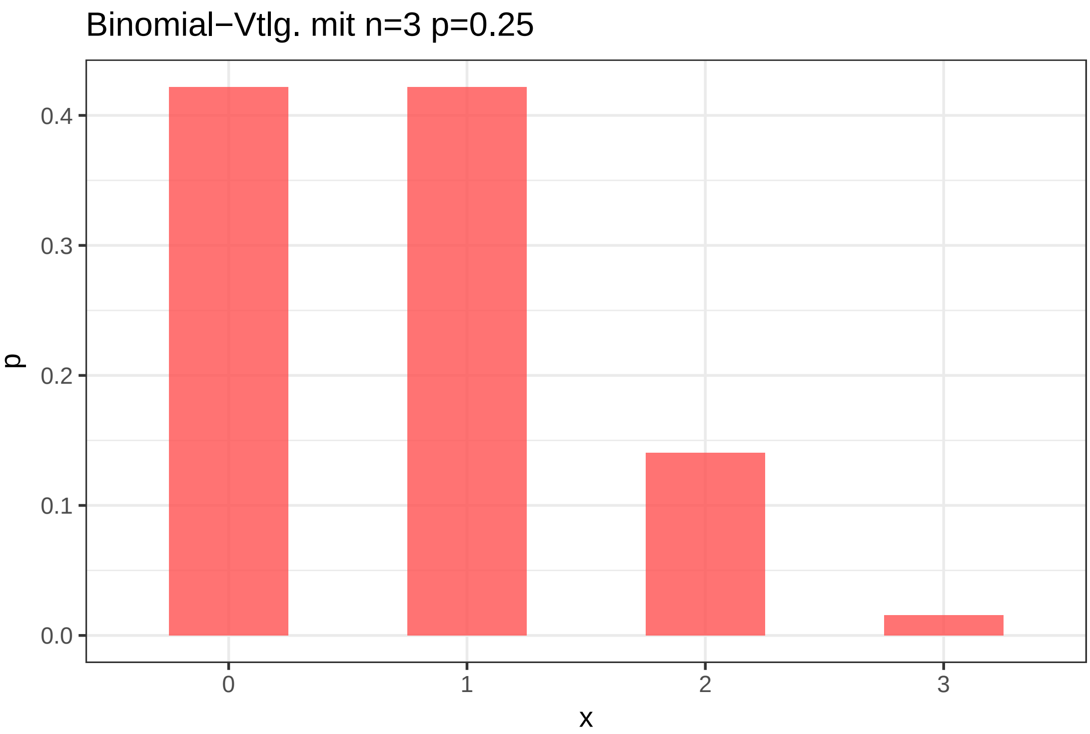
Mithilfe der Tabelle ($n = 3$):

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0{,}9844 - 0{,}8438 = 0{,}1406$$

Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion

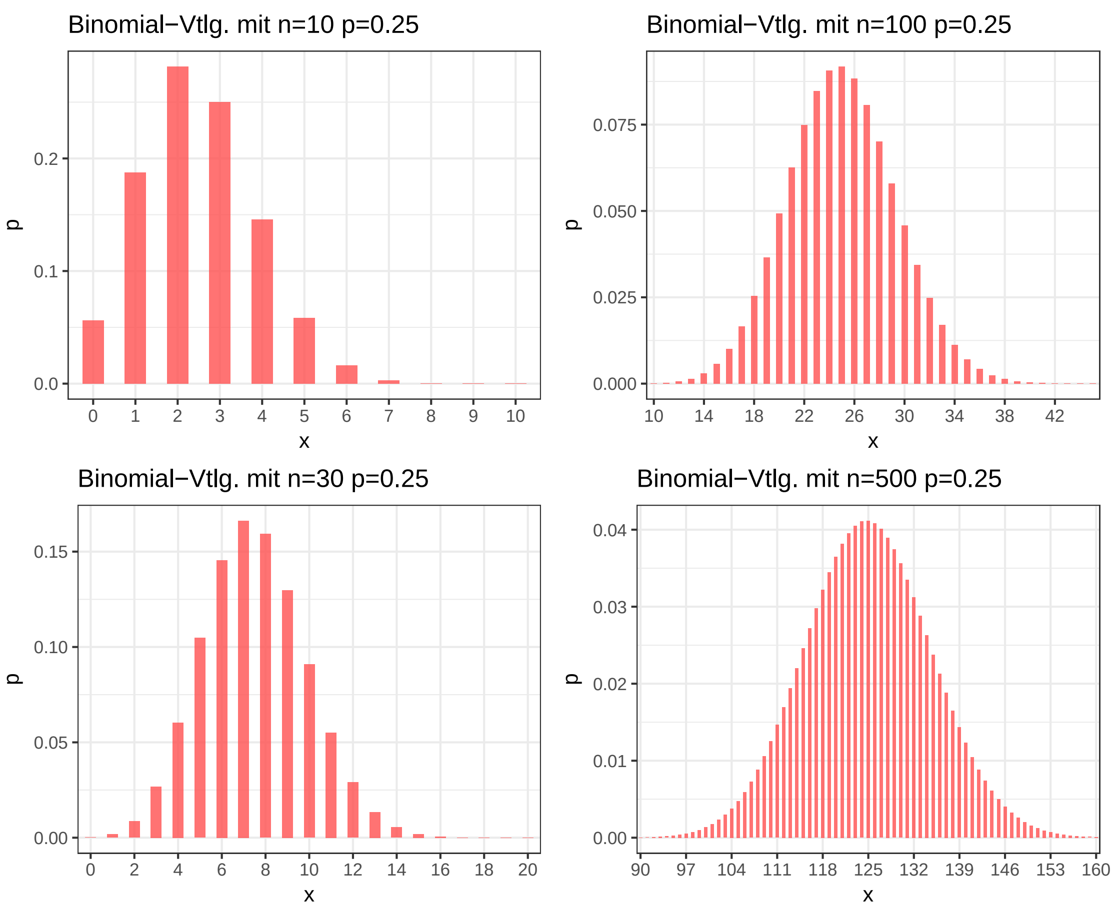
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- $X \sim B(3, \frac{1}{4})$



Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen



Hypergeometrische Verteilung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- n-faches Ziehen **ohne** Zurücklegen aus N Objekten, davon M markiert.

$$X = \text{Anzahl gezogener Objekte mit Markierung}$$

heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M, n.

- Kurzschreibweise: $X \sim \text{Hyp}(N; M; n)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{falls } x \text{ möglich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $n \leqq \frac{N}{20}$, so gilt: $\text{Hyp}(N; M; n) \approx B(n; \frac{M}{N})$

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte ohne Zurücklegen gezogen.
- Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal "'Herz"' zu ziehen?
- D.h.: $N = 32$, $M = 8$, $n = 3$, $x = 2$.

$$P(X=2) = f(2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{32-8}{3-2}}{\binom{32}{3}} = \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 24}{\frac{32!}{3!\cdot 29!}}$$

$$= \frac{29!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 24}{32!\cdot 6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 3\cdot 24}{32\cdot 31\cdot 30} = \frac{4032}{29760} = \frac{21}{155}$$

$$= 0{,}1355$$

Dabei wurde verwendet:

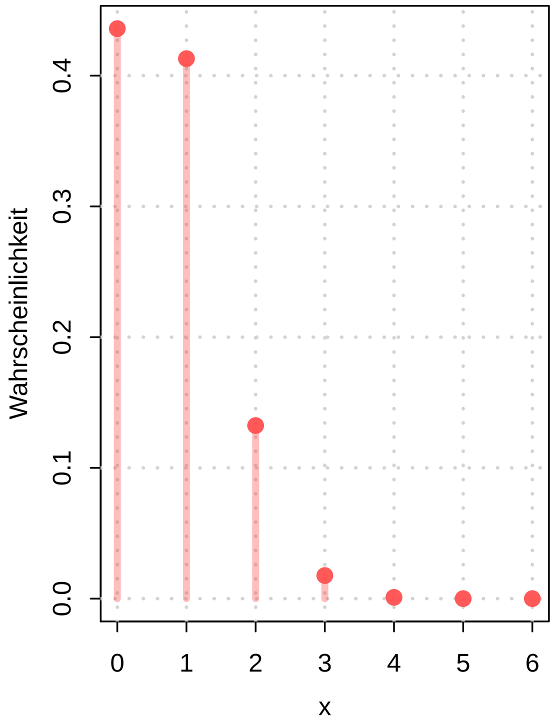
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$

Hypergeometrische Verteilung

Beispiel: x Treffer im Lotto 6 aus 49

- $X \sim \text{Hyp}(49, 6, 6)$

x	$P(X = x)$ (in %)
0	43.596498
1	41.301945
2	13.237803
3	1.765040
4	0.096862
5	0.001845
6	0.000007



Poisson-Verteilung

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Approximation für $B(n; p)$ und $\text{Hyp}(N; M; n)$
- Geeignet, wenn
  p klein ($\leqq 0{,}1$), n groß ($\geqq 50$) und $np \leqq 10$.
- ⇨ „Verteilung der seltenen Ereignisse“
  (z.B. Anzahl 6-er pro Lottoausspielung)
- X ist poissonverteilt mit Parameter λ: $X \sim P(\lambda)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $F(x)$ in Tabelle
- Überblick: Approximation

$$\text{Hyp}(N; M; n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n; p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)$$

Poissonverteilung: $X \sim P(\lambda)$, Tabelle der Verteilungsfunktionen

x \ λ	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.5249	0.4933	0.4628	0.4338	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3085	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1992
2	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571	0.8387	0.8194	0.7994	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9474	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9970	0.9962
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ λ	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
0	0.0451	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0203	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1469	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3209	0.3028	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1852	0.1736
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7255	0.7064	0.6872	0.6679	0.6484	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8706	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851	0.7693	0.7532	0.7367	0.7199	0.7029
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9422	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893	0.8787	0.8675	0.8558	0.8437	0.8311
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9598
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Poisson-Verteilung: Beispiel

Beispiel

- $X \sim B(10\,000; 0{,}0003)$; In Tabelle der Binomialverteilung nicht vertafelt! Approximation:

$$\left.\begin{aligned} p &= 0{,}0003 < 0{,}1 \\ n &= 10\,000 > 50 \\ np &= 3 \quad\;\; < 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(10\,000; 0{,}0003) \approx P(3)$$

- Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0{,}1008188$$

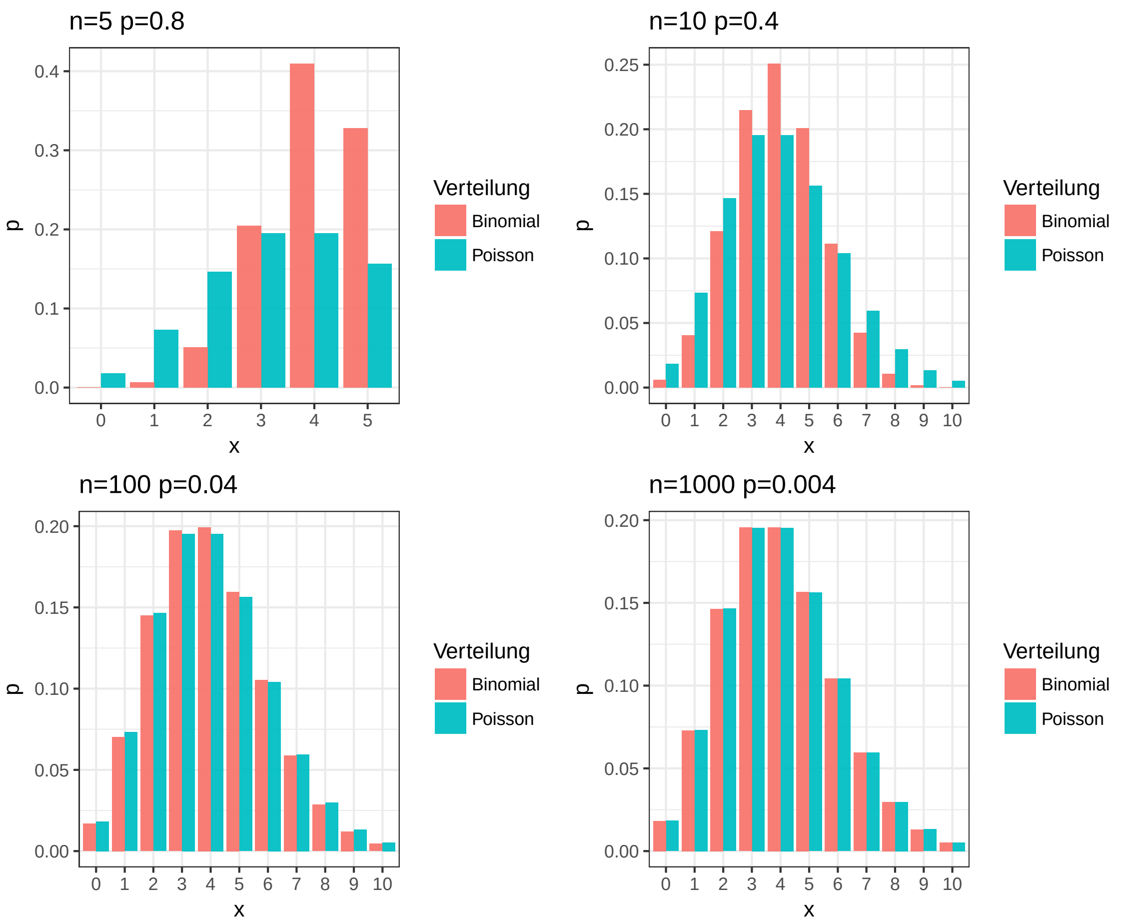
- Mithilfe der Tabelle der Poissonverteilung:

$$P(X = 5) = F(5) - F(4) = 0{,}9161 - 0{,}8153 = 0{,}1008$$

- Exakter Wert: $P(X = 5) = 0{,}1008239$

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Poisson- versus Binomialverteilung: Vergleich

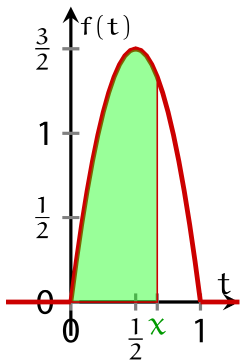


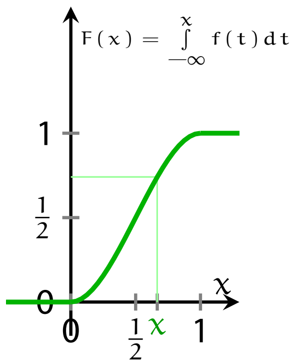
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Stetige Zufallsvariablen

- X heißt stetig, wenn $F(x)$ stetig ist.
- Dann existiert ein $f(t)$ mit:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

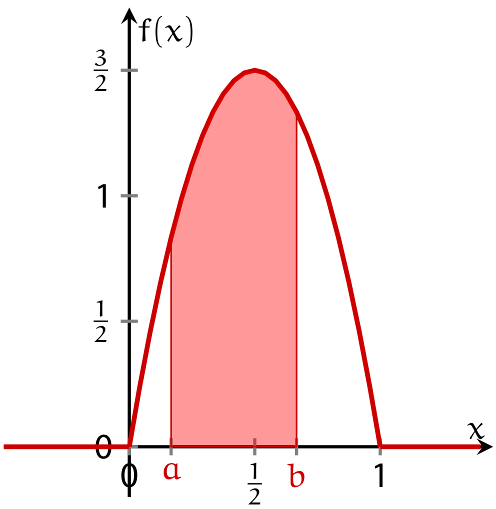




$f(x)$ heißt Dichtefunktion von X.

- Dann:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leqq X < b) \\ &= P(a < X \leqq b) \\ &= P(a \leqq X \leqq b) \\ &= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



Dichtefunktion

Eigenschaften der Dichtefunktion

- $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 1$ ist möglich
- für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ differenzierbar $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

$$\begin{aligned} P(X \in [a;b]) &= P(X \in (a;b]) \\ &= P(X \in [a;b)) \\ &= P(X \in (a;b)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Dichtefunktion: Beispiel

Statistik
Etschberger – SS2017

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 10 \\ 0, & \text{falls } \quad x > 10 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{10}\,dt = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \quad x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 10 \\ 1, & \text{falls } \quad x > 10 \end{cases}$$

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

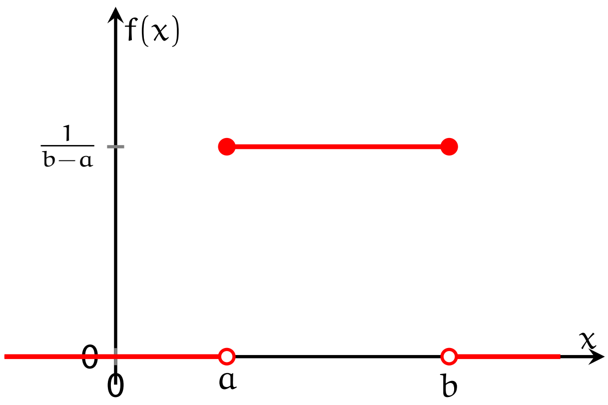
Gleichverteilung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Eine Zufallsvariable X mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt gleichverteilt im Intervall $[a; b]$.



Gleichverteilung

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 1, & \text{falls } x > b \end{cases}$$

- **Beispiel:** X gleichverteilt in $[1; 20]$

$$\begin{aligned} P(2 \leqq X \leqq 12) = F(12) - F(2) &= \frac{12-1}{20-1} - \frac{2-1}{20-1} \\ &= \frac{12-2}{20-1} = \frac{10}{19} \\ &= 0{,}5263 \end{aligned}$$

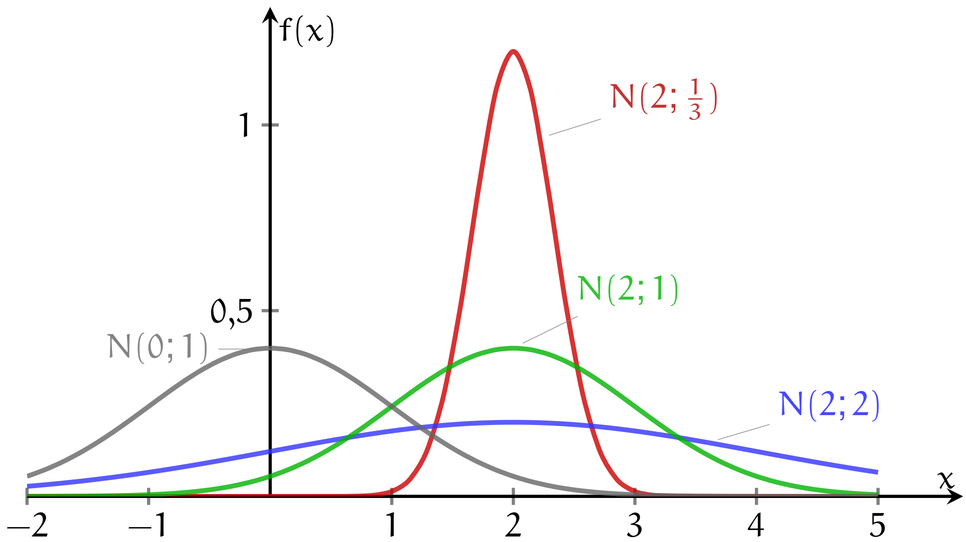
Normalverteilung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

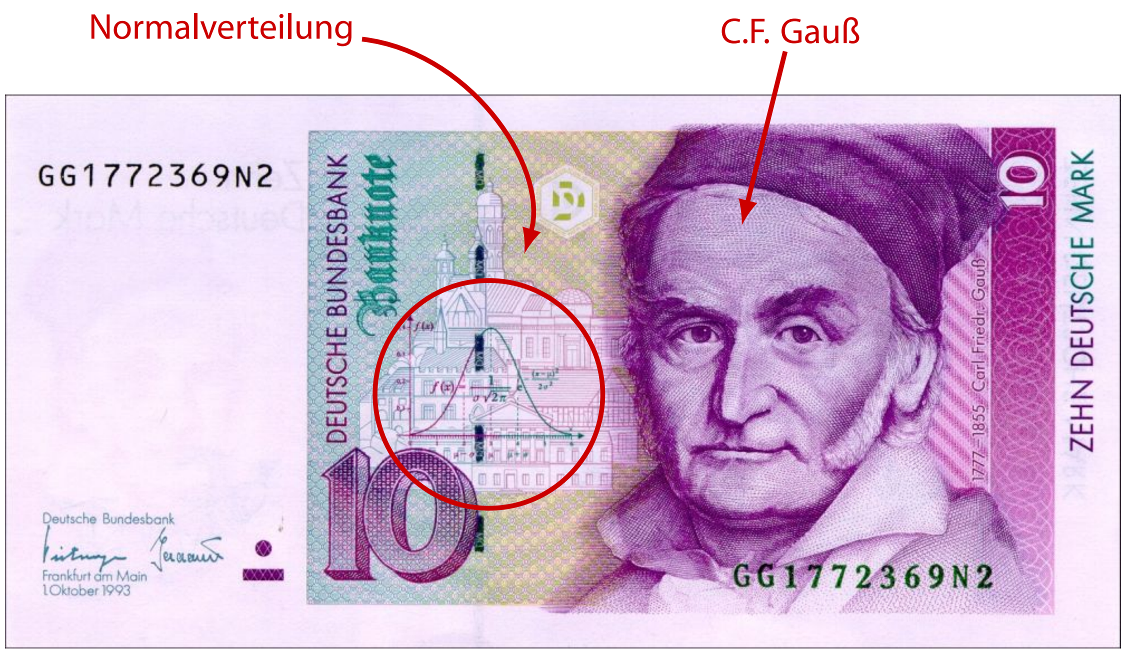
und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.



Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

Normalverteilung: Gaußkurve

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen



Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

Eigenschaften der Normalverteilung

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Dichte ist symmetrisch zu μ:

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

- ⇒ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter
- Standardnormalverteilung:
  $N(0;1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ ($\rightarrow$ Tabelle 3)
- Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:
  $X \sim N(\mu;\sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

- Tabelle enthält nur positive x: Deswegen

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

Normalverteilung: Beispiel

Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

Lösung:

$$\begin{aligned}
P(37 \leqq X \leqq 41) &= F(41) - F(37) \\
&= \Phi\left(\tfrac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{37-39}{2}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\
&= 0{,}6826
\end{aligned}$$

Lageparameter

a) **Modus** x_{Mod}: $f(x_{\text{Mod}}) \geqq f(x)$ für alle x
(i.A. nicht eindeutig, z.B. Gleichverteilung)

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Mod}} = \mu$
- Diskrete Verteilung mit:

$$\left.\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ f(x) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$$

b) **Median** x_{Med}: $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$ bzw. kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Med}} = \mu$
- Diskrete Verteilung
  oben: $F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1$

Lageparameter: Fraktile

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

c) α-Fraktil x_α: $F(x_\alpha) = \alpha$ (für stetige Verteilungen)

Beispiel: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(3;2)$

$$\begin{aligned} x_{0,975} &= & 1{,}96 \quad &\text{(Tab. 3)} \\ x_{0,025} &= -x_{0,975} &= -1{,}96 & \\ y_{0,025} &= 2 \cdot x_{0,025} + 3 &= -0{,}92 & \end{aligned}$$

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0,5}$
- Wenn x_α nicht vertafelt $\to$ Interpolation:

$$x_\alpha \approx x_a + (x_b - x_a) \cdot \frac{\alpha - a}{b - a}$$

mit a : größte vertafelte Zahl $< \alpha$
b : kleinste vertafelte Zahl $> \alpha$

Beispiel: $X \sim N(0;1)$; $x_{0,6} \approx$
$0{,}25 + (0{,}26 - 0{,}25) \cdot \frac{0{,}6 - 0{,}5987}{0{,}6026 - 0{,}5987} = 0{,}2533$

Lageparameter: Erwartungswert

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

d) Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ:

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{folgt}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx \right]$$

$$= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -0 - \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Ist f symmetrisch bzgl. a, so gilt $E(X) = a$
  Beispiel: f der Gleichverteilung symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Lineare Transformation:

$$\boxed{E(a + bX) = a + b \cdot E(X)}$$

- Summenbildung:

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0; 10]$, $Y \sim N(1; 1)$; $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X + 5Y) = E(X) + E(5Y) = E(X) + 5 \cdot E(Y) = \tfrac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

- Unabhängigkeit:

$$X,\ Y \text{ unabhängig} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Streuungsparameter

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Varianz $\mathrm{Var}(X)$ bzw. σ^2:

$$\mathrm{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \begin{cases} \sum\limits_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i), & \text{wenn } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\, dx, & \text{wenn } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- Standardabweichung $\mathrm{Sta}(X)$ bzw. σ: $\boxed{\mathrm{Sta}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\mathrm{Var}(X) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X (Dichte siehe Erwartungswert) folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\ &= e^{-\lambda x} \left(-x^2 + \tfrac{2x}{\lambda} - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{2x}{\lambda} + \tfrac{2}{\lambda^2}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-0^2 - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Rechenregeln für die Varianz

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

- Verschiebungssatz:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ f(x) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \\ \Rightarrow \quad E(X^2) - [E(X)]^2 &= \tfrac{3}{2} - 1^2 = \tfrac{1}{2} = \mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

- Lineare Transformation:

$$\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$$

- Summenbildung gilt nur, wenn die X_i unabhängig! Dann:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Erwartungswerte und Varianzen wichtiger Verteilungen

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Verteilung von X	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Binomialverteilung $B(n;p)$	np	$np(1-p)$
Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Poisson-Verteilung $P(\lambda)$	λ	λ
Gleichverteilung in $[a;b]$ mit $a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $N(\mu;\sigma)$	μ	σ^2

Anwendung: Ungleichung von Tschebyschow

- Für beliebige Zufallsvariablen X und $\varepsilon > 0$ gilt die Ungleichung von Tschebyschow:

$$P\big(|X - E[X]| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\operatorname{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

Beispiele:

- X ist gleichverteilt mit Parametern a, b und $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$, also $E[X] = \frac{1}{2}(a+b)$ und $\operatorname{Var}[X] = \frac{1}{12}(a-b)^2$

$$\Rightarrow P\Big(\big|X - \tfrac{1}{2}(a+b)\big| \geqslant \tfrac{1}{3}(a-b)\Big) \leqslant \frac{(a-b)^2}{12} \cdot \frac{3^2}{(a-b)^2} = 3/4$$

- $X \sim B(100; 0{,}2)$ und $\varepsilon = 10$
damit: $E[X] = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und $\operatorname{Var}[X] = 100 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2) = 16$

$$\Rightarrow P\big(|X - 20| \geqslant 10\big) \leqslant \frac{16}{10^2} = 0{,}16$$

Kovarianz und Korrelation

- Kovarianz:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ &\text{(Verschiebungssatz)}\end{aligned}$$

- Korrelationskoeffizient:

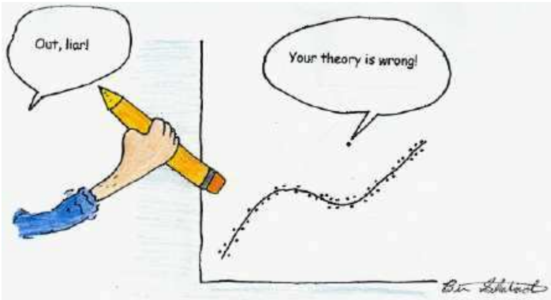
$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y)}}$$

- **Bemerkungen:**
  - ρ ist r nachgebildet $\Rightarrow \rho \in [-1; 1]$
  - $|\rho| = 1 \iff Y = a + bX$ (mit $b \neq 0$)
  - $\rho = 0 \iff X, Y$ **unkorreliert**
- Varianz einer Summe zweier ZV:

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)$$

Gliederung

1. Statistik: Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Induktive Statistik



5 Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests

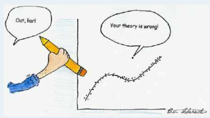
Grundlagen der induktiven Statistik

- Vollerhebung of unmöglich,
- Deshalb: Beobachte Teilgesamtheit und schließe auf Grundgesamtheit

Beispiel

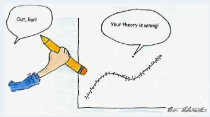
Warensendung von 1000 Stück; darunter M Stück Ausschuss.
M ist unbekannt.
$\to$ Zufällige Entnahme von $n = 30$ Stück („Stichprobe“).
Darunter 2 Stück Ausschuss.
Denkbare Zielsetzungen:

- Schätze M durch eine Zahl (z.B. $\frac{2}{30} \cdot 1000 = 66{,}67$)
- Schätze ein Intervall für M (z.B. $M \in [58; 84]$)
- Teste die Hypothese, dass $M > 50$ ist.



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

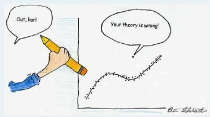
Grundbegriffe



- **Grundgesamtheit (G):** Menge aller relevanten Merkmalsträger.
- **Verteilung von G:** $F(x) = P(X \leqq x) =$ Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalsträger ausgewählt wird, der beim untersuchten Merkmal maximal die Ausprägung x aufweist.
- **Uneingeschränkte (reine) Zufallsauswahl:**
  Jedes Element von G hat die selbe Chance, ausgewählt zu werden.
- **Stichprobenumfang (n):** Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe.
- **Einfache Stichprobe:**
  Uneingeschränkte Zufallsauswahl und unabhängige Ziehung.
  $\to$ Alle **Stichprobenvariablen** $X_1, \ldots, X_n$ sind iid.
- **Stichprobenergebnis**:
  n-Tupel der Realisationen der Stichprobenvariablen, $(x_1, \ldots, x_n)$.

Wichtige Stichprobenfunktionen

Statistik
Etschberger – SS2017

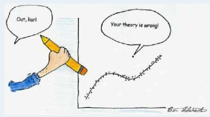


1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

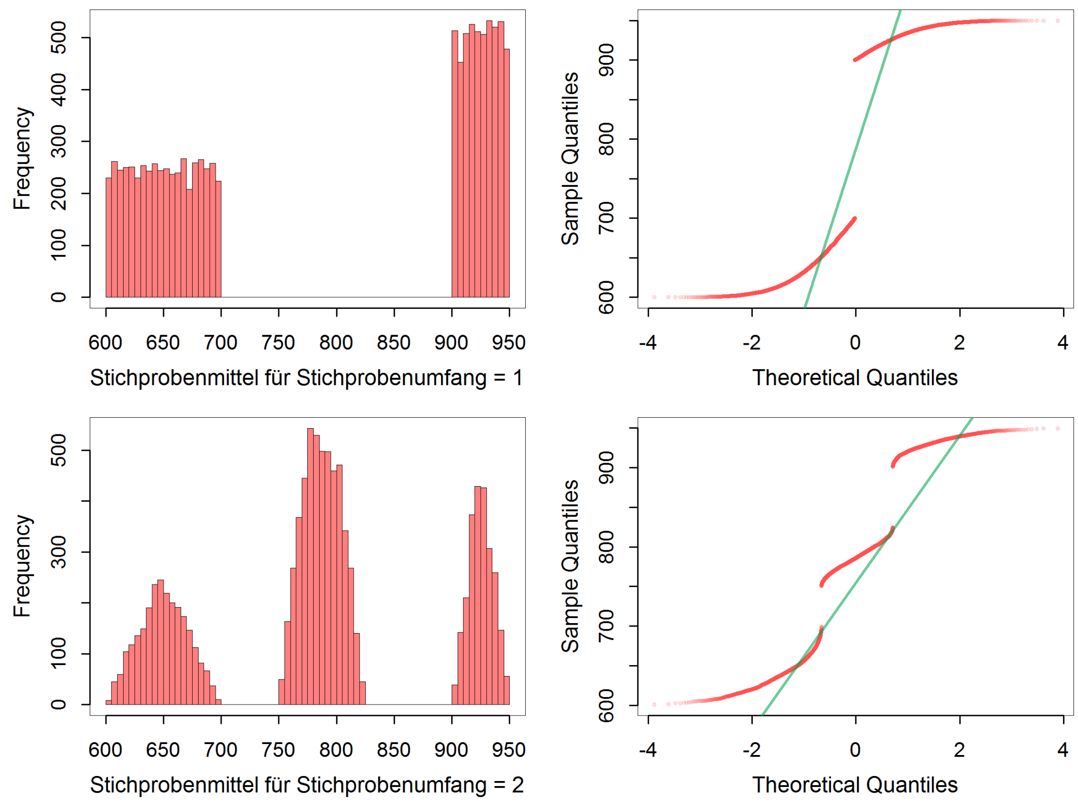
- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, Beliebige Verteilung,
  mit $E(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

Stichprobenfunktion V	Bezeichnung	E(V)	Var(V)
$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$	Merkmalssumme	$n\mu$	$n\sigma^2$
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$	Stichprobenmittel	μ	$\frac{\sigma^2}{n}$
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	Gauß-Statistik	0	1
$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ	σ^2	
$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	mittlere quadratische Abweichung	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	Stichprobenvarianz	σ^2	
$S = \sqrt{S^2}$	Stichproben-Standardabweichung		
$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	t-Statistik		

Auswirkungen der Stichprobengröße

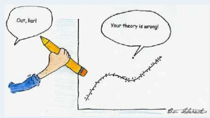


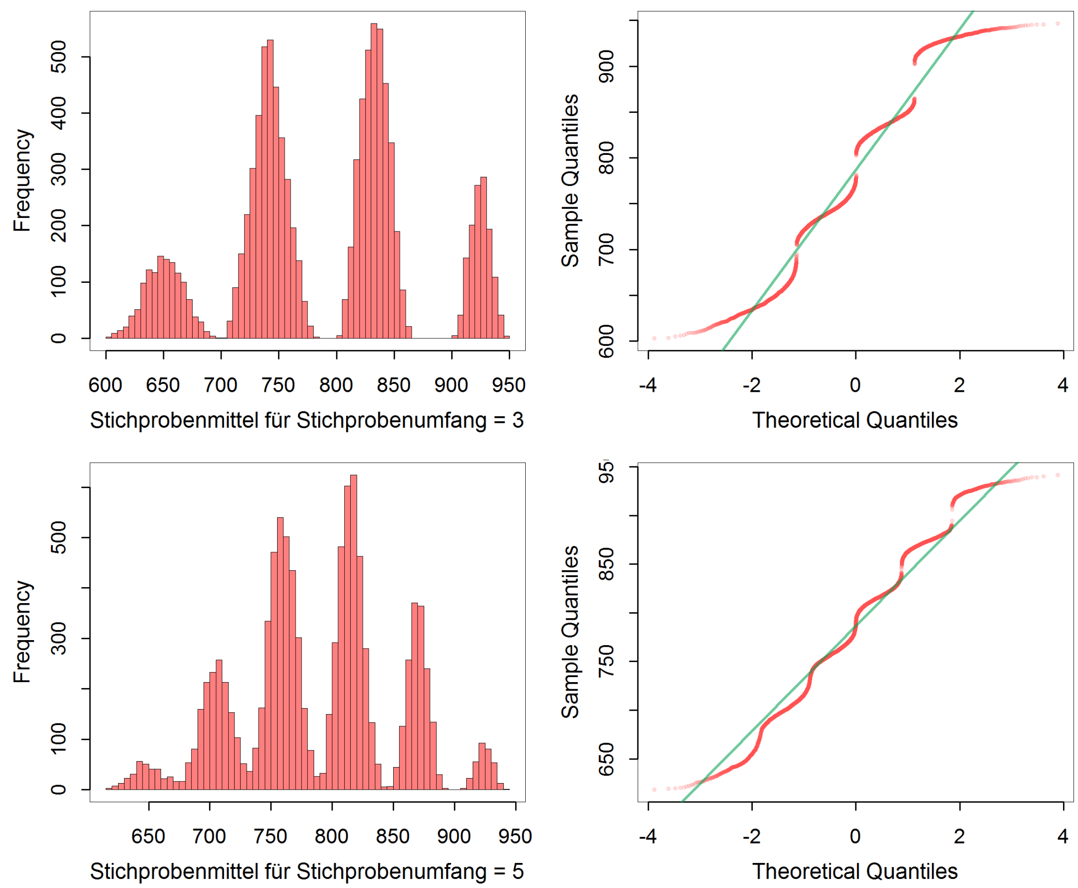
Ziehen von 10.000 Stichproben (jeweils vom Umfang n) und Berechnung der Stichprobenmittel (Verteilung: zwei überlagerte Gleichverteilungen):



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

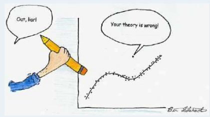
Auswirkungen der Stichprobengröße

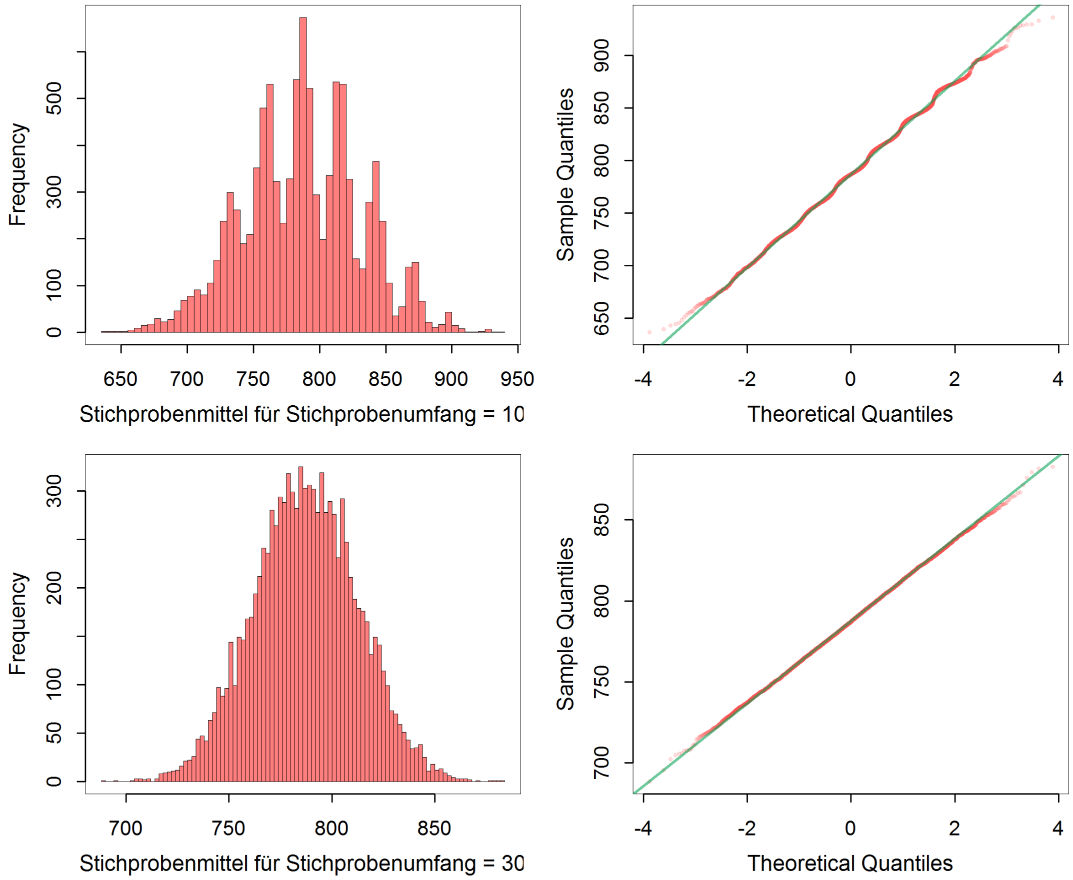




1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

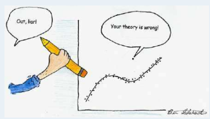
Auswirkungen der Stichprobengröße





Testverteilungen

Statistik
Etschberger – SS2017



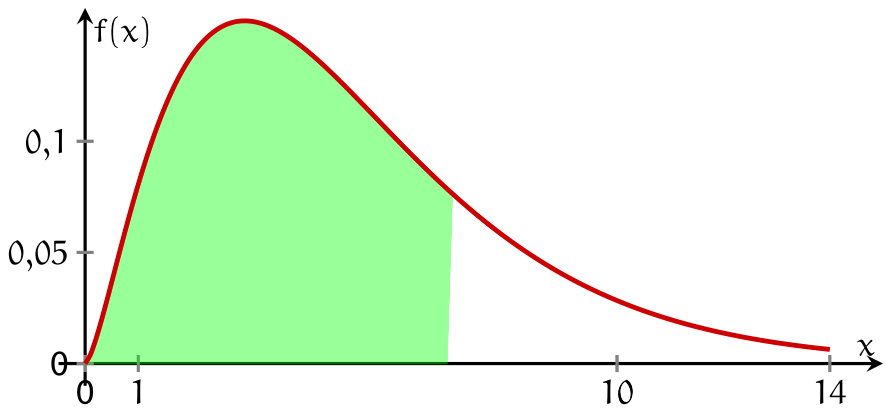
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen, so wird die Verteilung von

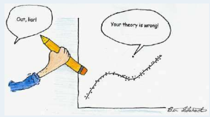
$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

als Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.



- Kurzschreibweise: $Z \sim \chi^2(n)$
- **Beispiel:** $\chi^2(30)$: $x_{0{,}975} = 46{,}98$

Quantilstabelle der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden

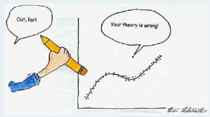


$\alpha \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16	2.60	3.07	3.56	4.07	4.60
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07	3.82	4.59	5.38	6.18	6.99	7.81	8.63	9.47	10.31
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57	5.49	6.42	7.36	8.30	9.24	10.18	11.13	12.08	13.03
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21	7.28	8.35	9.41	10.47	11.53	12.58	13.64	14.69	15.73
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56	9.80	11.03	12.24	13.44	14.63	15.81	16.98	18.15	19.31
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99	17.27	18.55	19.81	21.06	22.31
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80

$\alpha \backslash n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.1	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44	13.24	14.04	14.85	15.66	16.47	17.29	18.11	18.94	19.77	20.60
0.2	11.15	12.00	12.86	13.72	14.58	15.44	16.31	17.19	18.06	18.94	19.82	20.70	21.59	22.48	23.36
0.25	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45	16.34	17.24	18.14	19.04	19.94	20.84	21.75	22.66	23.57	24.48
0.4	13.98	14.94	15.89	16.85	17.81	18.77	19.73	20.69	21.65	22.62	23.58	24.54	25.51	26.48	27.44
0.5	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34	20.34	21.34	22.34	23.34	24.34	25.34	26.34	27.34	28.34	29.34
0.6	16.78	17.82	18.87	19.91	20.95	21.99	23.03	24.07	25.11	26.14	27.18	28.21	29.25	30.28	31.32
0.75	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83	24.93	26.04	27.14	28.24	29.34	30.43	31.53	32.62	33.71	34.80
0.8	20.47	21.61	22.76	23.90	25.04	26.17	27.30	28.43	29.55	30.68	31.79	32.91	34.03	35.14	36.25
0.9	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41	29.62	30.81	32.01	33.20	34.38	35.56	36.74	37.92	39.09	40.26
0.95	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41	32.67	33.92	35.17	36.41	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

Testverteilungen: t-Verteilung

Statistik
Etschberger – SS2017



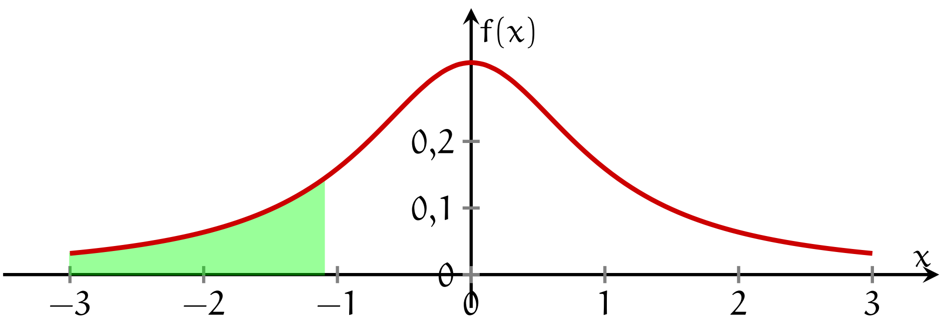
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

- Ist $X \sim N(0;1)$, $Z \sim \chi^2(n)$, X, Z unabhängig, so wird die Verteilung von

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}Z}}$$

als t-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.

William Sealy Gosset
1876 – 1937



- Kurzschreibweise: $T \sim t(n)$
- **Beispiel:** $t(10)$ $x_{0,6} = 0{,}260$, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,1} = -x_{0,9} = -1{,}372$

Quantilstabelle der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\alpha \setminus n$	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.979	1.638	2.353	3.183	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.698	0.875	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.054
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.059	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.312	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

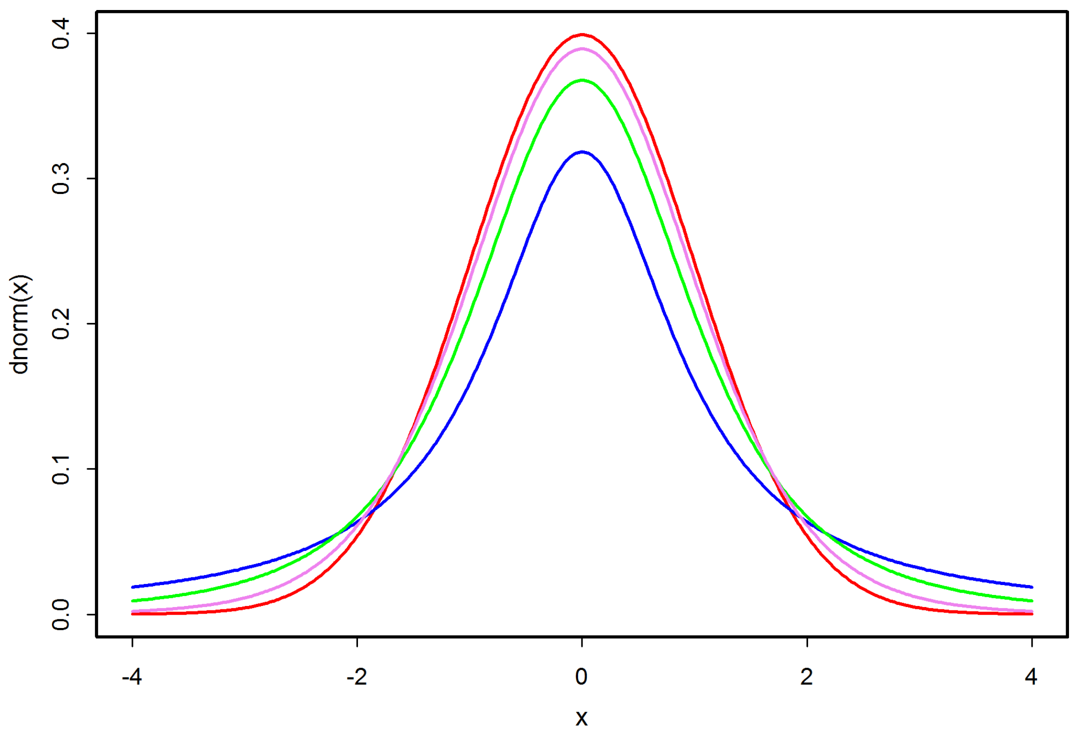
Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

t-Verteilung vs. Normalverteilung

Dichtefunktion

- t-Verteilung mit 1 (blau), 3 (grün) und 10 (lila) Freiheitsgraden
- Standardnormalverteilung (rot)



Punkt-Schätzung

- Ein unbekannter Parameter ϑ der Verteilung von G soll auf Basis einer Stichprobe geschätzt werden.
- Zum Beispiel: σ von $N(10;\sigma)$
- Schätzwert: $\hat{\vartheta}$
- Vorgehen: Verwendung einer Schätzfunktion

$$\hat{\Theta} = g(X_1,\ldots,X_n)$$

Beachte: Der Schätzwert $\hat{\vartheta}$ ist die Realisierung der ZV (!) $\hat{\Theta}$.

- Frage: Welche Stichprobenfunktion ist zur Schätzung geeignet?

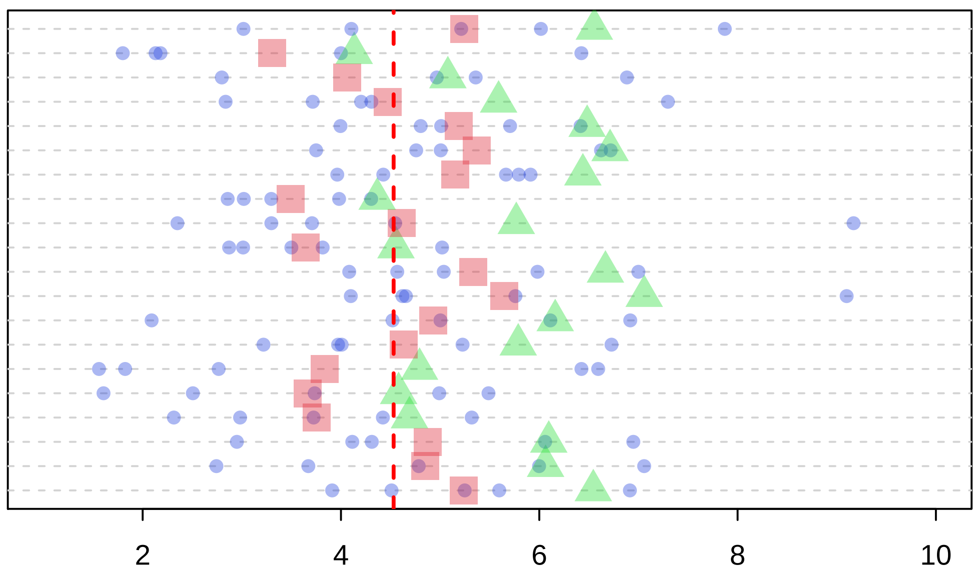
➡ Kriterien für die Beurteilung/Konstruktion von Schätzfunktionen!

- Im Folgenden: Vorliegen einer einfachen Stichprobe, d.h. $X_1,\ldots,X_n$ iid.

Beispiel

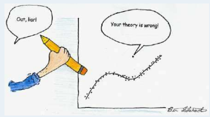
- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$



Mittelwert Grundgesamtheit = 4.53

Erwartungstreue und Wirksamkeit



- Eine Schätzfunktion $\hat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ heißt erwartungstreu oder unverzerrt für ϑ, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:
$$E(\hat{\Theta}) = \vartheta$$

Beispiel

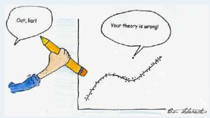
Sind $\hat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\hat{\Theta}_2 = \frac{X_1+X_n}{2}$, $\hat{\Theta}_3 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu für μ?

a) $\hat{\Theta}_1$: $\quad E(\bar{X}) = \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_1$ ist erwartungstreu.

b) $\hat{\Theta}_2$: $\quad E\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_n)] = \frac{1}{2}(\mu+\mu) = \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_2$ ist erwartungstreu.

c) $\hat{\Theta}_3$: $E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{n}{n-1}\mu \neq \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_3$ ist nicht erwartungstreu

Erwartungstreue und Wirksamkeit



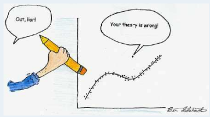
- Welche der erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2$ ist „besser"?
- Von zwei erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ für ϑ heißt $\hat{\Theta}_1$ wirksamer als $\hat{\Theta}_2$, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:
$$\operatorname{Var}(\hat{\Theta}_1) < \operatorname{Var}(\hat{\Theta}_2)$$

Beispiel: ($\hat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\hat{\Theta}_2 = \frac{X_1+X_n}{2}$)
Wegen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Var}(\hat{\Theta}_1) &= \operatorname{Var}(\bar{X}) &&= \frac{\sigma^2}{n} \\ \operatorname{Var}(\hat{\Theta}_2) &= \operatorname{Var}\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2) &&= \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Var}(\hat{\Theta}_1) < \operatorname{Var}(\hat{\Theta}_2)$$

(falls $n > 2$) ist $\hat{\Theta}_1$ wirksamer als $\hat{\Theta}_2$.

Intervall-Schätzung



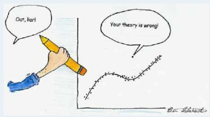
- Für einen unbekannten Verteilungsparameter ϑ soll auf Basis einer Stichprobe ein Intervall geschätzt werden.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen V_u, V_o, so dass $V_u \leqq V_o$ und

$$P(V_u \leqq \vartheta \leqq V_o) = 1 - \alpha$$

  stets gelten.
  $[V_u; V_o]$ heißt Konfidenzintervall (KI) für ϑ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.
- Beachte: Das Schätzintervall $[v_u; v_o]$ ist Realisierung der Zufallsvariablen (!) V_u, V_o.
  ➠ Irrtumswahrscheinlichkeit α (klein, i.d.R. $\alpha \leqq 0{,}1$)
- Frage: Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?
  ➠ Hängt von Verteilung von G sowie vom unbekannten Parameter (μ, σ^2) ab!
- Im Folgenden: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

Intervall-Schätzung

Statistik
Etschberger – SS2017

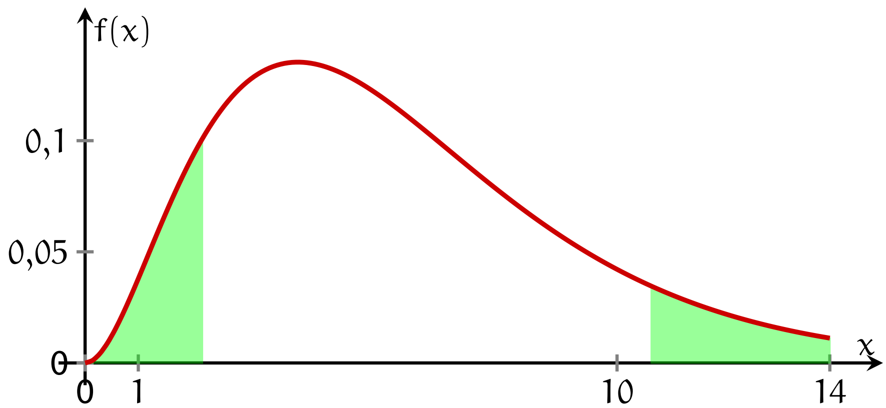


1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Wichtiger Spezialfall: Symmetrische Konfidenzintervalle

- Symmetrisch heißt **nicht**, dass die Dichte symmetrisch ist, sondern
- übereinstimmende Wahrscheinlichkeiten für Über-/Unterschreiten des Konfidenzintervalls, d.h.

$$P(V_u > \vartheta) = P(V_o < \vartheta) = \tfrac{\alpha}{2}$$



- **Wichtig:** Eine Verkleinerung von α bewirkt eine Vergrößerung des Konfidenzintervalls.

Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit bekanntem σ^2

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Vorgehensweise:

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $N(0,1)$-Verteilung
3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$
4. Berechnen des Wertes $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervallschätzung: Beispiel

Statistik
Etschberger – SS2017

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Beispiel

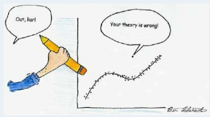
Normalverteilung mit $\sigma = 2{,}4$
$(x_1,\ldots,x_9)$ = (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)

Gesucht: Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0{,}99$

1. $1-\alpha = 0{,}99$
2. $N(0;1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0{,}01}{2}} = x_{0{,}995} = 2{,}576$ (Tab. 3; Interpolation)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}(184{,}2+\cdots+184{,}4) = 184{,}8$
4. $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}4\cdot 2{,}576}{\sqrt{9}} = 2{,}06$
5. $\text{KI} = [184{,}8-2{,}06;184{,}8+2{,}06] = [182{,}74;186{,}86]$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu \in [182{,}74;186{,}86]$.

Wichtige Fraktilswerte

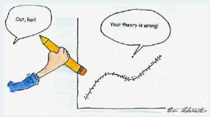


Wichtige $N(0;1)$-Fraktilswerte:

α	x_α
0,9	1,281552
0,95	1,644854
0,975	1,959964
0,99	2,326348
0,995	2,575829

(I.d.R. genügen drei Nachkommastellen.)

Intervalllänge



- Bei bekannter Standardabweichung gilt offenkundig

$$L = V_o - V_u = \frac{2\sigma c}{\sqrt{n}}$$

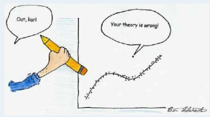
- Welcher Stichprobenumfang n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L? $\Rightarrow$ Nach n auflösen! $\Rightarrow$

$$\boxed{n \geqq \left(\frac{2\sigma c}{L}\right)^2}$$

- Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n!
- Angewendet auf letztes **Beispiel**:

$$L = 4 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}576}{4}\right)^2 = 9{,}556 \Rightarrow n \geqq 10$$
$$L = 2 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}576}{2}\right)^2 = 38{,}222 \Rightarrow n \geqq 39$$

Konfidenzintervall



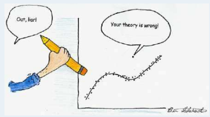
Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit unbekanntem σ^2

- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $t(n-1)$-Verteilung
  3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$ und der Stichproben-Standardabweichung s
  4. Berechnen des Wertes $\frac{sc}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{sc}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{sc}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 2: Falls $n-1>30$ wird die $N(0;1)$-Verteilung verwendet.

Konfidenzintervalllänge

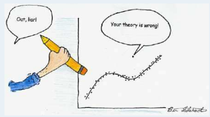


Beispiel:
Wie das letzte Beispiel, jedoch σ unbekannt.

1. $1-\alpha = 0{,}99$
2. $t(8)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0{,}01}{2}} = x_{0{,}995} = 3{,}355$ (Tab. 4)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}\,(184{,}2+\cdots+184{,}4) = 184{,}8$
   $s = \sqrt{\frac{1}{8}\left[(184{,}2^2+\cdots+184{,}4^2)-9\cdot 184{,}8^2\right]} = 1{,}31$
4. $\frac{sc}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}31\cdot 3{,}355}{\sqrt{9}} = 1{,}47$
5. $\text{KI} = [184{,}8-1{,}47; 184{,}8+1{,}47] = [183{,}33; 186{,}27]$

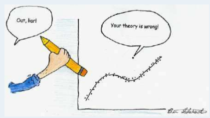
Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu \in [183{,}33; 186{,}27]$.

R Beispiel




```
x <- c(184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2,
       183.9, 185.0, 187.1, 184.4)
t.test(x,conf.level=.99)
##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = 422.11, df = 8, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 99 percent confidence interval:
##  183.331 186.269
## sample estimates:
## mean of x
##     184.8
```


Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung



- Voraussetzung: $n > 30$, bzw. falls G dichotom: $5 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq n-5$
- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0;1)$
  3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowe eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der GG mittels

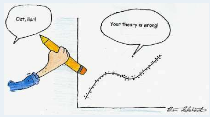
$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls GG dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

  4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 3: Manchmal kann anderer Schätzwert $\hat{\sigma}$ sinnvoller sein.

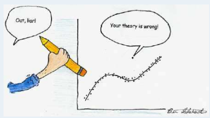
Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung



Beispiel:
Poisson-Verteilung mit $\lambda\ (= \mu = \sigma^2)$ unbekannt.
$(x_1, \ldots, x_{40}) = (3; 8; \ldots; 6)$
Gesucht: KI für λ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}9$

1. $1 - \alpha = 0{,}9$
2. $N(0;1): \ c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,1}{2}} = x_{0,95} = 1{,}645$
3. $\bar{x} = \frac{1}{40}(3 + 8 + \cdots + 6) = 6{,}5$
   $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$ (da $\sigma^2 = \lambda$)
4. $\frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}55 \cdot 1{,}645}{\sqrt{40}} = 0{,}66$
5. $\text{KI} = [6{,}5 - 0{,}66; 6{,}5 + 0{,}66] = [5{,}84; 7{,}16]$

Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung



Vorgehensweise

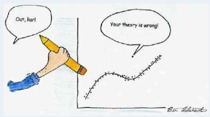
1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1 - a$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Fraktile (c_1 bzw. c_2) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 v$$

4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2} ; \frac{(n-1)s^2}{c_1} \right]$$

KI für σ^2 bei Normalverteilung



Beispiel:

$G \sim N(\mu; \sigma)$;

$(x_1, \dots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

Gesucht: KI für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

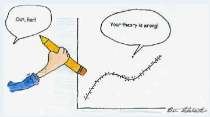
1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $\chi^2(5-1): \; c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$

   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2) = 2$

   $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^2 = 2{,}5$
4. KI = $\left[\frac{2{,}5}{14{,}86}; \frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17; 11{,}9]$

(Extrem groß, da n klein.)

Signifikanztests

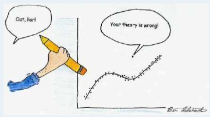


- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair."
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich."
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter" Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen".

Zu Beachten:

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis", dass Hypothese wahr ist!
(„Trick": Hypothese falsch $\iff$ Gegenhypothese wahr!)

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit



- Zunächst:
  - $G \sim N(\mu;\sigma)$ mit σ bekannt
  - Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$
- **Beispiel:**
  $X_1, \ldots, X_{25}$ mit X_i = Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu; 1{,}5)$
  Nullhypothese $H_0: \ \mu = 500$, d.h. $\mu_0 = 500$
- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche **Gegenhypothesen** möglich:

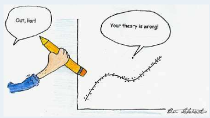
a) $H_1: \ \mu \neq \mu_0$
b) $H_1: \ \mu < \mu_0$
c) $H_1: \ \mu > \mu_0$

- Entscheidung:

$H_0: \ \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber
a) $H_1: \ \mu \neq \mu_0$, wenn $|\bar{x} - \mu_0|$ „sehr groß" ist
b) $H_1: \ \mu < \mu_0$, wenn $\bar{x}$ „weit kleiner" als μ_0 ist
c) $H_1: \ \mu > \mu_0$, wenn $\bar{x}$ „weit größer" als μ_0 ist

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

Statistik
Etschberger – SS2017



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Entscheidungskriterium aus Stichprobe:

$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

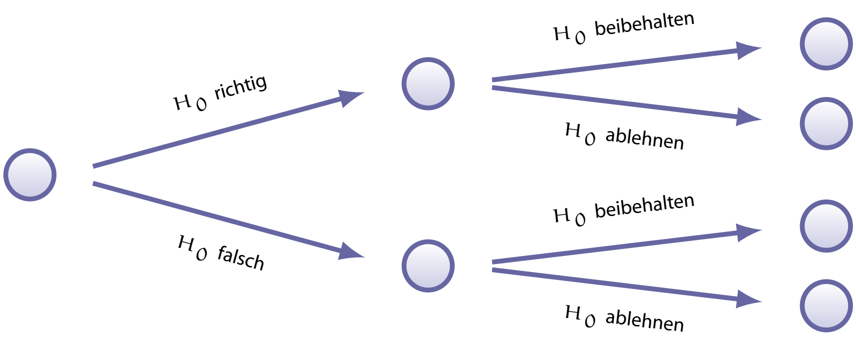
- Vorteil: Verteilung bekannt: $N(0;1)$
- Dann:

$H_0: \ \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

a) $H_1: \ \mu \neq \mu_0$, wenn $|v|$ „sehr groß" ist
b) $H_1: \ \mu < \mu_0$, wenn v „sehr negativ" ist
c) $H_1: \ \mu > \mu_0$, wenn v „sehr positiv" ist

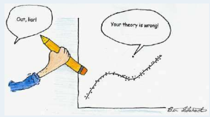
Mögliche Fehlentscheidungen

- **Ablehnung von H_0**, obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1. Art
- **Nicht-Ablehnung von H_0**, obwohl H_0 falsch ist: Fehler 2. Art



- Signifikanzniveau α: Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit



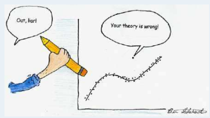
- Mithilfe von α und V kann geklärt werden, was „sehr groß“ usw. heißt:
  Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art im Fall
  a): $|v| > x$, obwohl H_0 richtig:

$$
\begin{aligned}
P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\
&= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\
&= 2 \cdot [1 - P(V \leqq x)] = 2 \cdot [1 - \Phi(x)] \stackrel{!}{=} \alpha \\
&\iff \Phi(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} \\
&\iff x = x_{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

  H_0 wird demnach verworfen,
  wenn $|v| > x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $v \in B$ ist.
  $B = (-\infty; -x_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ heißt Verwerfungsbereich.
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der GG

Statistik
Etschberger – SS2017



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

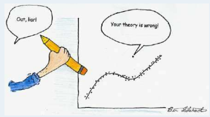
Rezept

1. Ein Signifikanzniveau α wird festgelegt.
2. Der Verwerfungsbereich

$$
\begin{aligned}
B &= \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(x_{1-\alpha/2};\ \infty\right) && \text{im Fall a)} \\
B &= (-\infty;\ -x_{1-\alpha}) && \text{im Fall b)} \\
B &= (x_{1-\alpha};\ \infty) && \text{im Fall c)}
\end{aligned}
$$

   wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha/2)$- bzw. das $(1-\alpha)$-Fraktil der $N(0,1)$-Verteilung ist. (Wichtig: Der Ablehnungsbereich ist also unabhängig von der Stichprobe)
3. Wichtig: Erst jetzt werden die Daten der Stichprobe erhoben/beachtet:
   Der Testfunktionswert $v = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird berechnet.
4. H_0 wird genau dann verworfen, wenn $v \in B$ gilt.

Einstichproben-Gaußtest



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Beispiel:

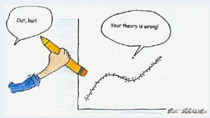
$X_1, \dots, X_{25}$ mit $X_i \sim N(\mu; 1{,}5)$ und $\bar{x} = 499{,}28$
Prüfe $H_0: \ \mu = 500, \ H_1: \ \mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$

Lösung: Einstichproben-Gaußtest, Fall a)

1. $\alpha = 0{,}01$
2. $N(0;1): \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0{,}005} = x_{0{,}995} = 2{,}576$
   $\Rightarrow B = (-\infty; -2{,}576) \cup (2{,}576; \infty)$
3. $v = \frac{499{,}28 - 500}{1{,}5} \cdot \sqrt{25} = -2{,}4$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.

Aufbau und Klassifikation von Signifikanztests



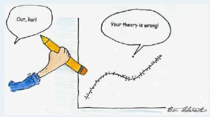
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Der jeweils geeignete Test hängt ab von ...

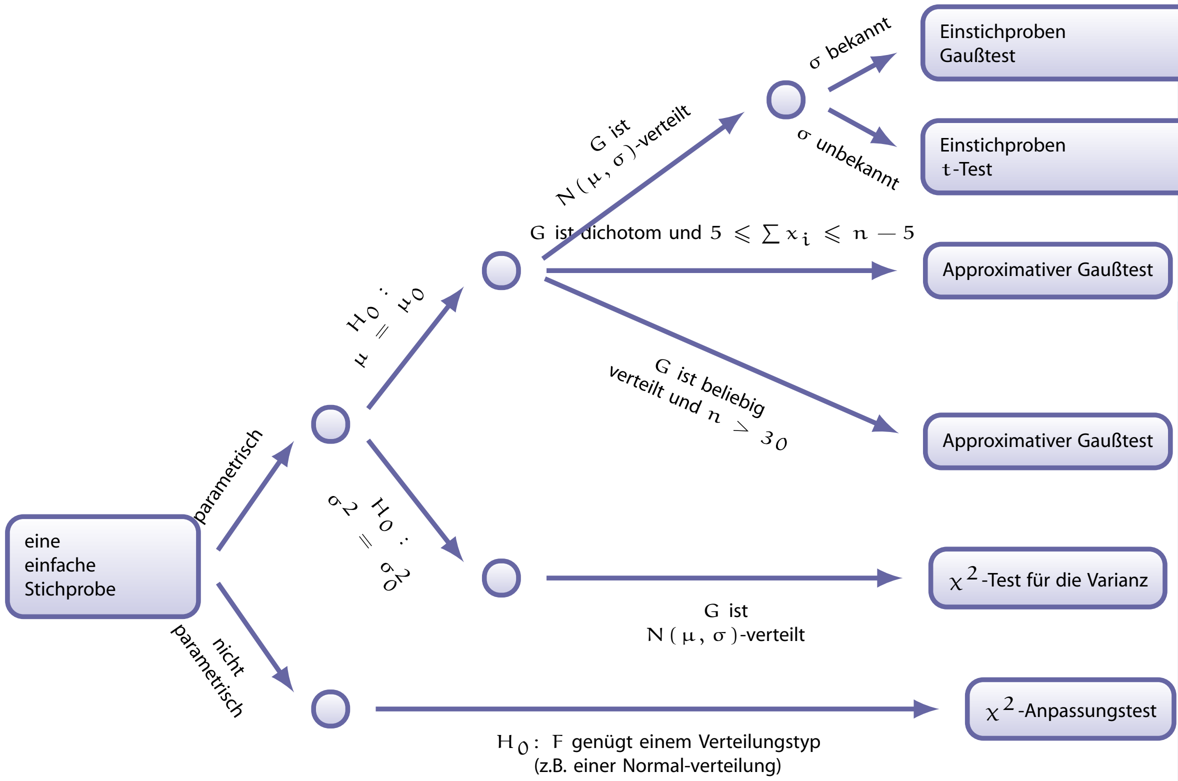
- dem zu testenden Hypothesenpaar H_0, H_1; unterscheide:
  - Parametrische Hypothesen:
    Beziehen sich auf unbekannte(n) Verteilungsparameter $(\mu, \sigma^2, \dots)$
  - Nichtparametrische Hypothesen:
    Beinhalten sonstige Aussagen, z.B. „Alter und Einkommen sind unabh.“
- den Voraussetzungen an die Verteilung/parameter (z.B. $G \sim N(\mu; \sigma)$)
- den Voraussetzungen an den Stichprobenumfang (z.B. $n > 30$)
- Art und Anzahl der Stichproben; unterscheide:
  - Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe
  - Signifikanztests bei mehreren unabhängigen Stichproben
  - Signifikanztests bei zwei verbundenen Stichproben

In dieser Vorlesung: Nur **einfache Stichproben**

Klassifizierung von Signifikanztests

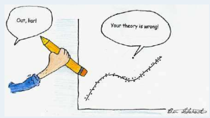


Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe



(Umfangreichere Übersicht über alle möglichen Fälle siehe Bamberg u. a., (2017).)

Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest



Gegeben:

- Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit
- $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

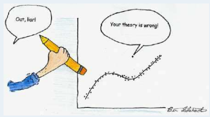
Hypothesenpaare:

a)	$H_0: \mu = \mu_0$		$H_1: \mu \neq \mu_0$
b)	$H_0: \mu = \mu_0$	(oder $\mu \geqq \mu_0$),	$H_1: \mu < \mu_0$
c)	$H_0: \mu = \mu_0$	(oder $\mu \leqq \mu_0$),	$H_1: \mu > \mu_0$

Voraussetzungen:

1. Normalverteilung mit σ unbekannt (Einstichproben-t-Test) **oder**
2. Beliebige Verteilung mit $n > 30$ bzw. $5 \leqq \sum x_i \leqq n - 5$ (bei $B(1;p)$) (approximativer Gaußtest)

Einstichproben-t-Test, approximativer Gaußtest



Ablauf:

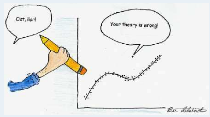
1. Festlegen des Signifikanzniveaus α
2. Festlegen des Verwerfungsbereichs B:
   - Falls $H_1 : \mu \neq \mu_0$: $B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
   - Falls $H_1 : \mu < \mu_0$: $B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
   - Falls $H_1 : \mu > \mu_0$: $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

   Dabei steht $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ für das jeweilige Fraktil
   - der $t(n-1)$-Verteilung bei $n \leqslant 29$ bzw.
   - der $N(0;1)$-Verteilung bei $n \geqslant 30$.
3. Berechnen des Testfunktionswertes:

$$v = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{falls Grundgesamtheit } N(\mu;\sigma)\text{-verteilt, } \sigma \text{ unbekannt oder falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ unbekannt} \\[2ex] \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ bekannt} \\[2ex] \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}}\sqrt{n} & \text{falls GG gemäß } B(1;\mu)\text{-verteilt, } n > 30 \end{cases}$$

Einstichproben-t-Test: Beispiel

Statistik
Etschberger – SS2017



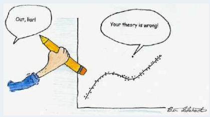
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Beispiel t-Test: Energieaufnahme von Frauen

- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifkanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- H_0: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ“ (μ_0)
- gegen H_1: $\mu \neq \mu_0$

```
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```

Einstichproben-t-Test, approx. Gaußtest



Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{2000} \sim B(1; p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls i-te Person Wähler einer bestimmten Partei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergebnis der Stichprobe: $\sum_{i=1}^{2000} x_i = 108$

Prüfe $H_0: p \leqq 0{,}05$ gegen $H_1: p > 0{,}05$ zum Signifikanzniveau 2 %

Lösung:

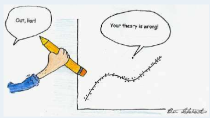
approximativer Gaußtest bei dichotomer (zweiwertiger) Verteilung; Voraussetzung 2 erfüllt: $5 \leqq 108 \leqq 2000 - 5$

1. $\alpha = 0{,}02$
2. $N(0; 1): x_{1-\alpha} = x_{0{,}98} = 2{,}05$ (Tabelle) $\Rightarrow B = (2{,}05; \infty)$
3. $v = \frac{\frac{108}{2000} - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05 \cdot (1 - 0{,}05)}} \sqrt{2000} = 0{,}82$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zusatzfrage: Entscheidung, falls $\alpha = 0{,}01$? $\to$ Keine Änderung!

Chi-Quadrat-Test für die Varianz

Statistik
Etschberger – SS2017



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu; \sigma)$
- Hypothesenpaare:

a)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
b)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (oder $\sigma^2 \geqq \sigma_0^2$),	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$
c)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (oder $\sigma^2 \leqq \sigma_0^2$),	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

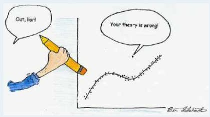
- **Vorgehensweise:**
  1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
  2. Festlegen des Verwerfungsbereichs:

$$B = [0; x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty) \quad \text{im Fall a)}$$
$$B = [0; x_{\alpha}) \quad \text{im Fall b)}$$
$$B = (x_{1-\alpha}; \infty) \quad \text{im Fall c)}$$

  3. Berechnung des Testfunktionswertes:

$$v = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Chi-Quadrat-Test für die Varianz



Beispiel: $G \sim N(\mu; \sigma)$

$(x_1, \ldots, x_{10}) = (2100; 2130; 2150; 2170; 2210; 2070; 2230; 2150; 2230; 2200)$

Prüfe $H_0: \ \sigma = 40, \ H_1: \ \sigma \neq 40$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

Lösung: χ^2-Test für die Varianz, Hypothese Fall a);
Voraussetzungen sind erfüllt

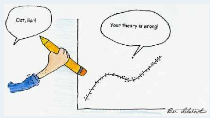
1. $\alpha = 0{,}1$
2. $\chi^2(9): \ x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}05} = 3{,}33; \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}95} = 16{,}92$
   (Tabelle der χ^2-Verteilung)

   $$\Rightarrow B = [0; 3{,}33) \cup (16{,}92; \infty)$$
3. $\bar{x} = \frac{1}{10}(2100 + 2130 + \cdots + 2200) = 2164$

   $v = \frac{1}{40^2}\left[(2100 - 2164)^2 + \cdots + (2200 - 2164)^2\right] = 16{,}65$

   $\Rightarrow v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest



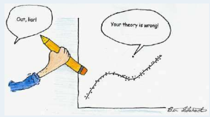
- Situation: In Grundgesamtheit G: Zwei verbundene einfache Stichproben, also Beobachtung zweier Merkmale X, Y
- Hypothese:

  $H_0:$ Die beiden Merkmale X und Y sind in G unabhängig.
  $H_1:$ X und Y sind in G abhängig.

Vorgehensweise Kontingenztest:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
2. Unterteilung der x-Achse in $k \geqslant 2$ und die y-Achse in $l \geqslant 2$ disjunkte, aneinander angrenzende Intervalle $A_1, \ldots, A_k$ bzw. $B_1, \ldots, B_l$
3. Erstellen einer Kontingenztabelle mit Randhäufigkeiten:

$x\downarrow \ y\rightarrow$	B_1	B_2	$\cdots$	B_l	
A_1	h_{11}	h_{12}	$\cdots$	h_{1l}	$h_{1\bullet}$
A_2	h_{21}	h_{22}	$\cdots$	h_{2l}	$h_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_k	h_{k1}	h_{k2}	$\cdots$	h_{kl}	$h_{k\bullet}$
	$h_{\bullet 1}$	$h_{\bullet 2}$	$\cdots$	$h_{\bullet l}$	n



Vorgehensweise Kontingenztest (Fortsetzung):

4. Mit dem Fraktilswert $x_{1-\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit $(k-1)\cdot(l-1)$ Freiheitsgraden: Berechnung des Verwerfungsbereichs

$$B = (x_{1-\alpha}; \infty)$$

5. Zu jeder Kombination aus $i = 1, \ldots, k$ und $j = 1, \ldots, l$: Berechnung der Größe

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}$$

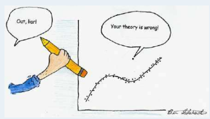
6. Berechnung des Testfunktionswerts v:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(\tilde{h}_{ij} - h_{ij}\right)^2}{\tilde{h}_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{h_{ij}^2}{\tilde{h}_{ij}} - n$$

7. Ablehnung von H_0 genau dann, wenn $v \in B$.

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest

Statistik
Etschberger – SS2017



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
   - Grundlagen
   - Punkt-Schätzung
   - Intervall-Schätzung
   - Signifikanztests

Quellen

Tabellen

Kontingenztest: Beispiel

- 400 Erstkandidaten einer praktischen Führerscheinprüfung schneiden abhängig von der besuchten Fahrschule folgendermaßen ab:

	Fahrschule		
	A	B	C
bestanden	130	88	62
durchgefallen	70	38	12

- Zum Signifikanzniveau von 5 % soll getestet werden, ob das Bestehen der Prüfung unabhängig von der besuchten Fahrschule ist.

Testdurchführung

1. Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$
2. entfällt, da Skalenniveau nominal
3. Kontingenztabelle:

	A	B	C	$\sum$
best.	130	88	62	280
durchg.	70	38	12	120
$\sum$	200	126	74	400

4. χ^2-Verteilung mit $(3-1)\cdot(2-1) = 2$ Freiheitsgraden: $x_{1-0,05} = x_{0,95} = 5{,}99$:

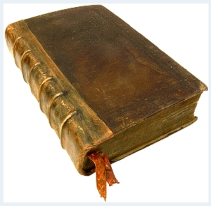
$$B = (5{,}99; \infty)$$

5. Berechnung der $\tilde{h}_{ij}$:

	A	B	C
best.	140	88,2	51,8
durchg.	60	37,8	22,2

6. $$v = \frac{(140-130)^2}{140} + \ldots + \frac{(22{,}2-12)^2}{22{,}2} \approx 9{,}077$$

7. $v \in B$: Also wird H_0 abgelehnt, die Prüfungsergebnisse sind abhängig von der Fahrschule.

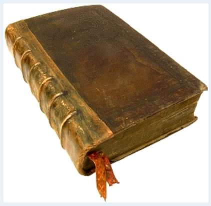


Bücher

- Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2017). **Statistik: Eine Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler**. 18. voll aktualisierte Auflage. De Gruyter Oldenbourg.
- Dalgaard, Peter (2002). **Introductory Statistics with R**. New York: Springer.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.

Quellenübersicht

Statistik
Etschberger – SS2017



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Quellen zu Bildern und Daten

- Anscombe, Francis (1973). „Graphs in Statistical Analysis“. In: **The American Statistician**, S. 195–199.
- Bach, Axel, Reinhard Brüning, Katrin Krieft, Hilmar Liebsch und Martin Rosenberg (2006). **Mit Zahlen lügen**. URL: `http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2006/1017/000_zahlen.jsp`.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Kramer, Walter (2011). **So lügt man mit Statistik**. Piper Verlag.

Binomialverteilung $X \sim B(n;p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$

1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen
Binomialverteilung
Poissonverteilung
Standardnormalverteilung
χ^2-Verteilung
t-Verteilung
F-Verteilung

$n = 2$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.3600	0.2500
1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8400	0.7500

$n = 3$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2160	0.1250
1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.6480	0.5000
2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9360	0.8750

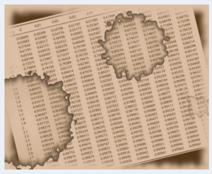
$n = 4$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1296	0.0625
1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.4752	0.3125
2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8208	0.6875
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9744	0.9375

$n = 5$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0313
1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875
2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688

Binomialverteilung $X \sim B(n;p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen
Binomialverteilung
Poissonverteilung
Standardnormalverteilung
χ^2-Verteilung
t-Verteilung
F-Verteilung

$n = 6$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9415	0.8858	0.8330	0.7828	0.7351	0.6899	0.6470	0.6064	0.5679	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0467	0.0156
1	0.9985	0.9943	0.9875	0.9784	0.9672	0.9541	0.9392	0.9227	0.9048	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.2333	0.1094
2	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9978	0.9962	0.9942	0.9915	0.9882	0.9842	0.9011	0.8306	0.7443	0.5443	0.3438
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8208	0.6563
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9590	0.8906
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9959	0.9844

$n = 7$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9321	0.8681	0.8080	0.7514	0.6983	0.6485	0.6017	0.5578	0.5168	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0280	0.0078
1	0.9980	0.9921	0.9829	0.9706	0.9556	0.9382	0.9187	0.8974	0.8745	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.1586	0.0625
2	1.0000	0.9997	0.9991	0.9980	0.9962	0.9937	0.9903	0.9860	0.9807	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.4199	0.2266
3	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9982	0.9973	0.9667	0.9294	0.8740	0.7102	0.5000
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9037	0.7734
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9812	0.9375
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9984	0.9922

$n = 8$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9227	0.8508	0.7837	0.7214	0.6634	0.6096	0.5596	0.5132	0.4703	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0168	0.0039
1	0.9973	0.9897	0.9777	0.9619	0.9428	0.9208	0.8965	0.8702	0.8423	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1064	0.0352
2	0.9999	0.9996	0.9987	0.9969	0.9942	0.9904	0.9853	0.9789	0.9711	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.3154	0.1445
3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9987	0.9978	0.9966	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.5941	0.3633
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9896	0.9727	0.9420	0.8263	0.6367
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9502	0.8555
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9915	0.9648
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961

Binomialverteilung $X \sim B(n; p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$

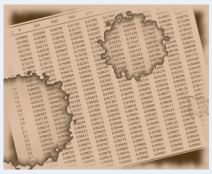
$n = 9$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9135	0.8337	0.7602	0.6925	0.6302	0.5730	0.5204	0.4722	0.4279	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0101	0.0020
1	0.9966	0.9869	0.9718	0.9522	0.9288	0.9022	0.8729	0.8417	0.8088	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.0705	0.0195
2	0.9999	0.9994	0.9980	0.9955	0.9916	0.9862	0.9791	0.9702	0.9595	0.9470	0.7382	0.6007	0.4628	0.2318	0.0898
3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9977	0.9963	0.9943	0.9917	0.9144	0.8343	0.7297	0.4826	0.2539
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991	0.9804	0.9511	0.9012	0.7334	0.5000
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9969	0.9900	0.9747	0.9006	0.7461
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9750	0.9102
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9962	0.9805
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980

$n = 10$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9044	0.8171	0.7374	0.6648	0.5987	0.5386	0.4840	0.4344	0.3894	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010
1	0.9957	0.9838	0.9655	0.9418	0.9139	0.8824	0.8483	0.8121	0.7746	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107
2	0.9999	0.9991	0.9972	0.9938	0.9885	0.9812	0.9717	0.9599	0.9460	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547
3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980	0.9964	0.9942	0.9912	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990

Binomialverteilung $X \sim B(n; p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$



$n = 15$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.8601	0.7386	0.6333	0.5421	0.4633	0.3953	0.3367	0.2863	0.2430	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000
1	0.9904	0.9647	0.9270	0.8809	0.8290	0.7738	0.7168	0.6597	0.6035	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005
2	0.9996	0.9970	0.9906	0.9797	0.9638	0.9429	0.9171	0.8870	0.8531	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037
3	1.0000	0.9998	0.9992	0.9976	0.9945	0.9896	0.9825	0.9727	0.9601	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176
4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9972	0.9950	0.9918	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

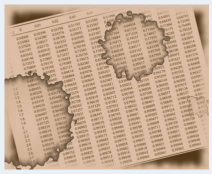
Binomialverteilung $X \sim B(n;p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$

$n = 20$

$\downarrow x$ $p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000
1	0.9831	0.9401	0.8802	0.8103	0.7358	0.6605	0.5869	0.5169	0.4516	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000
2	0.9990	0.9929	0.9790	0.9561	0.9245	0.8850	0.8390	0.7879	0.7334	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002
3	1.0000	0.9994	0.9973	0.9926	0.9841	0.9710	0.9529	0.9294	0.9007	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013
4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9974	0.9944	0.9893	0.9817	0.9710	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9981	0.9962	0.9932	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Binomialverteilung $X \sim B(n;p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$

Statistik
Etschberger – SS2017



$n = 25$

$\downarrow x$ $p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.7778	0.6035	0.4670	0.3604	0.2774	0.2129	0.1630	0.1244	0.0946	0.0718	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
1	0.9742	0.9114	0.8280	0.7358	0.6424	0.5527	0.4696	0.3947	0.3286	0.2712	0.0274	0.0070	0.0016	0.0001	0.0000
2	0.9980	0.9868	0.9620	0.9235	0.8729	0.8129	0.7466	0.6768	0.6063	0.5371	0.0982	0.0321	0.0090	0.0004	0.0000
3	0.9999	0.9986	0.9938	0.9835	0.9659	0.9402	0.9064	0.8649	0.8169	0.7636	0.2340	0.0962	0.0332	0.0024	0.0001
4	1.0000	0.9999	0.9992	0.9972	0.9928	0.9850	0.9726	0.9549	0.9314	0.9020	0.4207	0.2137	0.0905	0.0095	0.0005
5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9969	0.9935	0.9877	0.9790	0.9666	0.6167	0.3783	0.1935	0.0294	0.0020
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9987	0.9972	0.9946	0.9905	0.7800	0.5611	0.3407	0.0736	0.0073
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9977	0.8909	0.7265	0.5118	0.1536	0.0216
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9532	0.8506	0.6769	0.2735	0.0539
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9827	0.9287	0.8106	0.4246	0.1148
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9944	0.9703	0.9022	0.5858	0.2122
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9985	0.9893	0.9558	0.7323	0.3450
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.8462	0.5000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9222	0.6550
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9656	0.7878
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9868	0.8852
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9957	0.9461
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9988	0.9784
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9927
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

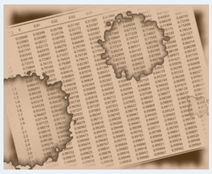
1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen
Binomialverteilung
Poissonverteilung
Standardnormalverteilung
χ^2-Verteilung
t-Verteilung
F-Verteilung

Binomialverteilung $X \sim B(n; p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$

$n = 50$

$\downarrow x$ $p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.6050	0.3642	0.2181	0.1299	0.0769	0.0453	0.0266	0.0155	0.0090	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9106	0.7358	0.5553	0.4005	0.2794	0.1900	0.1265	0.0827	0.0532	0.0338	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9862	0.9216	0.8108	0.6767	0.5405	0.4162	0.3108	0.2260	0.1605	0.1117	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9984	0.9822	0.9372	0.8609	0.7604	0.6473	0.5327	0.4253	0.3303	0.2503	0.0057	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9999	0.9968	0.9832	0.9510	0.8964	0.8206	0.7290	0.6290	0.5277	0.4312	0.0185	0.0021	0.0002	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9995	0.9963	0.9856	0.9622	0.9224	0.8650	0.7919	0.7072	0.6161	0.0480	0.0070	0.0007	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964	0.9882	0.9711	0.9417	0.8981	0.8404	0.7702	0.1034	0.0194	0.0025	0.0000	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9968	0.9906	0.9780	0.9562	0.9232	0.8779	0.1904	0.0453	0.0073	0.0001	0.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9973	0.9927	0.9833	0.9672	0.9421	0.3073	0.0916	0.0183	0.0002	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9944	0.9875	0.9755	0.4437	0.1637	0.0402	0.0008	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9994	0.9983	0.9957	0.9906	0.5836	0.2622	0.0789	0.0022	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9968	0.7107	0.3816	0.1390	0.0057	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.8139	0.5110	0.2229	0.0133	0.0002
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.8894	0.6370	0.3279	0.0280	0.0005
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9393	0.7481	0.4468	0.0540	0.0013
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9692	0.8369	0.5692	0.0955	0.0033
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9856	0.9017	0.6839	0.1561	0.0077
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9937	0.9449	0.7822	0.2369	0.0164
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9975	0.9713	0.8594	0.3356	0.0325
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9861	0.9152	0.4465	0.0595
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9937	0.9522	0.5610	0.1013
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9974	0.9749	0.6701	0.1611
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9990	0.9877	0.7660	0.2399
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9944	0.8438	0.3359
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9976	0.9022	0.4439
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9427	0.5561
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9686	0.6641
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9840	0.7601
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9924	0.8389
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9966	0.8987
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9986	0.9405
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9675
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9836
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9923
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9967
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987

Binomialverteilung $X \sim B(n; p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$



$n = 100$

$\downarrow x$ $p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.3660	0.1326	0.0476	0.0169	0.0059	0.0021	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7358	0.4033	0.1946	0.0872	0.0371	0.0152	0.0060	0.0023	0.0009	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9206	0.6767	0.4198	0.2321	0.1183	0.0566	0.0258	0.0113	0.0048	0.0019	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9816	0.8590	0.6472	0.4295	0.2578	0.1430	0.0744	0.0367	0.0173	0.0078	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9966	0.9492	0.8179	0.6289	0.4360	0.2768	0.1632	0.0903	0.0474	0.0237	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9995	0.9845	0.9192	0.7884	0.6160	0.4407	0.2914	0.1799	0.1045	0.0576	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.9999	0.9959	0.9688	0.8936	0.7660	0.6064	0.4443	0.3032	0.1940	0.1172	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9991	0.9894	0.9525	0.8720	0.7483	0.5988	0.4471	0.3128	0.2061	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9998	0.9968	0.9810	0.9369	0.8537	0.7340	0.5926	0.4494	0.3209	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9991	0.9932	0.9718	0.9225	0.8380	0.7220	0.5875	0.4513	0.0023	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9885	0.9624	0.9092	0.8243	0.7118	0.5832	0.0057	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	0.9957	0.9832	0.9531	0.8972	0.8124	0.7030	0.0126	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9931	0.9776	0.9441	0.8862	0.8018	0.0253	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9974	0.9901	0.9718	0.9355	0.8761	0.0469	0.0025	0.0001	0.0000	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9959	0.9867	0.9659	0.9274	0.0804	0.0054	0.0002	0.0000	0.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9942	0.9831	0.9601	0.1285	0.0111	0.0004	0.0000	0.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9976	0.9922	0.9794	0.1923	0.0211	0.0010	0.0000	0.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9966	0.9900	0.2712	0.0376	0.0022	0.0000	0.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9986	0.9954	0.3621	0.0630	0.0045	0.0000	0.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9980	0.4602	0.0995	0.0089	0.0000	0.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.5595	0.1488	0.0165	0.0000	0.0000
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.6540	0.2114	0.0288	0.0000	0.0000
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.7389	0.2864	0.0479	0.0001	0.0000
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.8109	0.3711	0.0755	0.0003	0.0000
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.8686	0.4617	0.1136	0.0006	0.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9125	0.5535	0.1631	0.0012	0.0000
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9442	0.6417	0.2244	0.0024	0.0000
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9658	0.7224	0.2964	0.0046	0.0000
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9800	0.7925	0.3768	0.0084	0.0000
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9888	0.8505	0.4623	0.0148	0.0000
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9939	0.8962	0.5491	0.0248	0.0000
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9969	0.9307	0.6331	0.0398	0.0001
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9554	0.7107	0.0615	0.0002
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	0.9724	0.7793	0.0913	0.0004
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9836	0.8371	0.1303	0.0009
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9906	0.8839	0.1795	0.0018

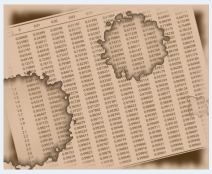
Poissonverteilung $X_\lambda \sim P(\lambda)$, Verteilungsfunktionen $F_\lambda(x) = P(X_\lambda \leqslant x)$

↓x λ→	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4
0	0.3679	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907
1	0.7358	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084
2	0.9197	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697
3	0.9810	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787
4	0.9963	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041
5	0.9994	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643
6	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998

↓x λ→	2.5	2.75	3	3.25	3.5	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5	5.25	5.5	5.75	6
0	0.0821	0.0639	0.0498	0.0388	0.0302	0.0235	0.0183	0.0143	0.0111	0.0087	0.0067	0.0052	0.0041	0.0032	0.0025
1	0.2873	0.2397	0.1991	0.1648	0.1359	0.1117	0.0916	0.0749	0.0611	0.0497	0.0404	0.0328	0.0266	0.0215	0.0174
2	0.5438	0.4815	0.4232	0.3696	0.3208	0.2771	0.2381	0.2037	0.1736	0.1473	0.1247	0.1051	0.0884	0.0741	0.0620
3	0.7576	0.7030	0.6472	0.5914	0.5366	0.4838	0.4335	0.3862	0.3423	0.3019	0.2650	0.2317	0.2017	0.1749	0.1512
4	0.8912	0.8554	0.8153	0.7717	0.7254	0.6775	0.6288	0.5801	0.5321	0.4854	0.4405	0.3978	0.3575	0.3199	0.2851
5	0.9580	0.9392	0.9161	0.8888	0.8576	0.8229	0.7851	0.7449	0.7029	0.6597	0.6160	0.5722	0.5289	0.4866	0.4457
6	0.9858	0.9776	0.9665	0.9523	0.9347	0.9137	0.8893	0.8617	0.8311	0.7978	0.7622	0.7248	0.6860	0.6464	0.6063
7	0.9958	0.9927	0.9881	0.9817	0.9733	0.9624	0.9489	0.9326	0.9134	0.8914	0.8666	0.8392	0.8095	0.7776	0.7440
8	0.9989	0.9978	0.9962	0.9937	0.9901	0.9852	0.9786	0.9702	0.9597	0.9470	0.9319	0.9144	0.8944	0.8719	0.8472
9	0.9997	0.9994	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9880	0.9829	0.9764	0.9682	0.9582	0.9462	0.9322	0.9161
10	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9990	0.9983	0.9972	0.9956	0.9933	0.9903	0.9863	0.9812	0.9747	0.9669	0.9574
11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9963	0.9945	0.9922	0.9890	0.9850	0.9799
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9980	0.9970	0.9955	0.9937	0.9912
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9993	0.9989	0.9983	0.9975	0.9964
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9986
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

Poissonverteilung $X_\lambda \sim P(\lambda)$, Verteilungsfunktionen $F_\lambda(x) = P(X_\lambda \leqslant x)$

↓x λ→	6.25	6.5	6.75	7	7.25	7.5	7.75	8	8.25	8.5	8.75	9	9.25	9.5	10
0	0.0019	0.0015	0.0012	0.0009	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0140	0.0113	0.0091	0.0073	0.0059	0.0047	0.0038	0.0030	0.0024	0.0019	0.0015	0.0012	0.0010	0.0008	0.0005
2	0.0517	0.0430	0.0357	0.0296	0.0245	0.0203	0.0167	0.0138	0.0113	0.0093	0.0076	0.0062	0.0051	0.0042	0.0028
3	0.1303	0.1118	0.0958	0.0818	0.0696	0.0591	0.0501	0.0424	0.0358	0.0301	0.0253	0.0212	0.0178	0.0149	0.0103
4	0.2530	0.2237	0.1970	0.1730	0.1514	0.1321	0.1149	0.0996	0.0862	0.0744	0.0640	0.0550	0.0471	0.0403	0.0293
5	0.4064	0.3690	0.3338	0.3007	0.2699	0.2414	0.2152	0.1912	0.1694	0.1496	0.1317	0.1157	0.1013	0.0885	0.0671
6	0.5662	0.5265	0.4876	0.4497	0.4132	0.3782	0.3449	0.3134	0.2838	0.2562	0.2305	0.2068	0.1849	0.1649	0.1301
7	0.7089	0.6728	0.6359	0.5987	0.5615	0.5246	0.4884	0.4530	0.4186	0.3856	0.3540	0.3239	0.2954	0.2687	0.2202
8	0.8204	0.7916	0.7611	0.7291	0.6960	0.6620	0.6274	0.5925	0.5577	0.5231	0.4890	0.4557	0.4232	0.3918	0.3328
9	0.8978	0.8774	0.8549	0.8305	0.8043	0.7764	0.7471	0.7166	0.6852	0.6530	0.6203	0.5874	0.5545	0.5218	0.4579
10	0.9462	0.9332	0.9183	0.9015	0.8828	0.8622	0.8399	0.8159	0.7903	0.7634	0.7352	0.7060	0.6760	0.6453	0.5830
11	0.9737	0.9661	0.9571	0.9467	0.9345	0.9208	0.9053	0.8881	0.8692	0.8487	0.8266	0.8030	0.7781	0.7520	0.6968
12	0.9880	0.9840	0.9790	0.9730	0.9658	0.9573	0.9475	0.9362	0.9234	0.9091	0.8932	0.8758	0.8568	0.8364	0.7916
13	0.9949	0.9929	0.9904	0.9872	0.9832	0.9784	0.9727	0.9658	0.9578	0.9486	0.9380	0.9261	0.9129	0.8981	0.8645
14	0.9979	0.9970	0.9958	0.9943	0.9923	0.9897	0.9866	0.9827	0.9781	0.9726	0.9661	0.9585	0.9499	0.9400	0.9165
15	0.9992	0.9988	0.9983	0.9976	0.9966	0.9954	0.9938	0.9918	0.9893	0.9862	0.9824	0.9780	0.9727	0.9665	0.9513
16	0.9997	0.9996	0.9994	0.9990	0.9986	0.9980	0.9973	0.9963	0.9950	0.9934	0.9914	0.9889	0.9859	0.9823	0.9730
17	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996	0.9995	0.9992	0.9989	0.9984	0.9978	0.9970	0.9960	0.9947	0.9931	0.9911	0.9857
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9993	0.9991	0.9987	0.9982	0.9976	0.9968	0.9957	0.9928
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9992	0.9989	0.9986	0.9980	0.9965
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9984
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9993
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

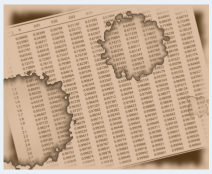


Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976

α-Fraktile der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden



$\downarrow \alpha \setminus n \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16	2.60	3.07	3.56	4.07	4.60
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07	3.82	4.59	5.38	6.18	6.99	7.81	8.63	9.47	10.31
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57	5.49	6.42	7.36	8.30	9.24	10.18	11.13	12.08	13.03
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21	7.28	8.35	9.41	10.47	11.53	12.58	13.64	14.69	15.73
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56	9.80	11.03	12.24	13.44	14.63	15.81	16.98	18.15	19.31
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99	17.27	18.55	19.81	21.06	22.31
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80

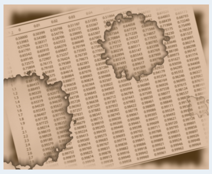
$\downarrow \alpha \setminus n \rightarrow$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.1	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44	13.24	14.04	14.85	15.66	16.47	17.29	18.11	18.94	19.77	20.60
0.2	11.15	12.00	12.86	13.72	14.58	15.44	16.31	17.19	18.06	18.94	19.82	20.70	21.59	22.48	23.36
0.25	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45	16.34	17.24	18.14	19.04	19.94	20.84	21.75	22.66	23.57	24.48
0.4	13.98	14.94	15.89	16.85	17.81	18.77	19.73	20.69	21.65	22.62	23.58	24.54	25.51	26.48	27.44
0.5	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34	20.34	21.34	22.34	23.34	24.34	25.34	26.34	27.34	28.34	29.34
0.6	16.78	17.82	18.87	19.91	20.95	21.99	23.03	24.07	25.11	26.14	27.18	28.21	29.25	30.28	31.32
0.75	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83	24.93	26.04	27.14	28.24	29.34	30.43	31.53	32.62	33.71	34.80
0.8	20.47	21.61	22.76	23.90	25.04	26.17	27.30	28.43	29.55	30.68	31.79	32.91	34.03	35.14	36.25
0.9	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41	29.62	30.81	32.01	33.20	34.38	35.56	36.74	37.92	39.09	40.26
0.95	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41	32.67	33.92	35.17	36.41	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

α-Fraktile der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\downarrow n \setminus \alpha \rightarrow$	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.979	1.638	2.353	3.183	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.698	0.875	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.054
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.059	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.312	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

α-Fraktile der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden ν_1 und ν_2

Statistik
Etschberger – SS2017



1. Einführung
2. Differenzieren 2
3. Deskriptive Statistik
4. W-Theorie
5. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen
Binomialverteilung
Poissonverteilung
Standardnormalverteilung
χ^2-Verteilung
t-Verteilung
F-Verteilung

$\alpha = 0{,}95$

$\nu_1 \setminus \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100
1	161.4	18.51	10.13	7.71	6.61	5.99	5.59	5.32	5.12	4.96	4.54	4.35	4.17	4.08	4.03	3.94
2	199.5	19.00	9.55	6.94	5.79	5.14	4.74	4.46	4.26	4.10	3.68	3.49	3.32	3.23	3.18	3.09
3	215.7	19.16	9.28	6.59	5.41	4.76	4.35	4.07	3.86	3.71	3.29	3.10	2.92	2.84	2.79	2.70
4	224.6	19.25	9.12	6.39	5.19	4.53	4.12	3.84	3.63	3.48	3.06	2.87	2.69	2.61	2.56	2.46
5	230.2	19.30	9.01	6.26	5.05	4.39	3.97	3.69	3.48	3.33	2.90	2.71	2.53	2.45	2.40	2.31
6	234.0	19.33	8.94	6.16	4.95	4.28	3.87	3.58	3.37	3.22	2.79	2.60	2.42	2.34	2.29	2.19
7	236.8	19.35	8.89	6.09	4.88	4.21	3.79	3.50	3.29	3.14	2.71	2.51	2.33	2.25	2.20	2.10
8	238.9	19.37	8.85	6.04	4.82	4.15	3.73	3.44	3.23	3.07	2.64	2.45	2.27	2.18	2.13	2.03
9	240.5	19.38	8.81	6.00	4.77	4.10	3.68	3.39	3.18	3.02	2.59	2.39	2.21	2.12	2.07	1.97
10	241.9	19.40	8.79	5.96	4.74	4.06	3.64	3.35	3.14	2.98	2.54	2.35	2.16	2.08	2.03	1.93
15	245.9	19.43	8.70	5.86	4.62	3.94	3.51	3.22	3.01	2.85	2.40	2.20	2.01	1.92	1.87	1.77
20	248.0	19.45	8.66	5.80	4.56	3.87	3.44	3.15	2.94	2.77	2.33	2.12	1.93	1.84	1.78	1.68
30	250.1	19.46	8.62	5.75	4.50	3.81	3.38	3.08	2.86	2.70	2.25	2.04	1.84	1.74	1.69	1.57
40	251.1	19.47	8.59	5.72	4.46	3.77	3.34	3.04	2.83	2.66	2.20	1.99	1.79	1.69	1.63	1.52
50	251.8	19.48	8.58	5.70	4.44	3.75	3.32	3.02	2.80	2.64	2.18	1.97	1.76	1.66	1.60	1.48
100	253.0	19.49	8.55	5.66	4.41	3.71	3.27	2.97	2.76	2.59	2.12	1.91	1.70	1.59	1.52	1.39

$\alpha = 0{,}99$

$\nu_1 \setminus \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100
1	4052	98.50	34.12	21.20	16.26	13.75	12.25	11.26	10.56	10.04	8.68	8.10	7.56	7.31	7.17	6.90
2	5000	99.00	30.82	18.00	13.27	10.92	9.55	8.65	8.02	7.56	6.36	5.85	5.39	5.18	5.06	4.82
3	5403	99.17	29.46	16.69	12.06	9.78	8.45	7.59	6.99	6.55	5.42	4.94	4.51	4.31	4.20	3.98
4	5625	99.25	28.71	15.98	11.39	9.15	7.85	7.01	6.42	5.99	4.89	4.43	4.02	3.83	3.72	3.51
5	5764	99.30	28.24	15.52	10.97	8.75	7.46	6.63	6.06	5.64	4.56	4.10	3.70	3.51	3.41	3.21
6	5859	99.33	27.91	15.21	10.67	8.47	7.19	6.37	5.80	5.39	4.32	3.87	3.47	3.29	3.19	2.99
7	5928	99.36	27.67	14.98	10.46	8.26	6.99	6.18	5.61	5.20	4.14	3.70	3.30	3.12	3.02	2.82
8	5981	99.37	27.49	14.80	10.29	8.10	6.84	6.03	5.47	5.06	4.00	3.56	3.17	2.99	2.89	2.69
9	6022	99.39	27.35	14.66	10.16	7.98	6.72	5.91	5.35	4.94	3.89	3.46	3.07	2.89	2.78	2.59
10	6056	99.40	27.23	14.55	10.05	7.87	6.62	5.81	5.26	4.85	3.80	3.37	2.98	2.80	2.70	2.50
15	6157	99.43	26.87	14.20	9.72	7.56	6.31	5.52	4.96	4.56	3.52	3.09	2.70	2.52	2.42	2.22
20	6209	99.45	26.69	14.02	9.55	7.40	6.16	5.36	4.81	4.41	3.37	2.94	2.55	2.37	2.27	2.07
30	6261	99.47	26.50	13.84	9.38	7.23	5.99	5.20	4.65	4.25	3.21	2.78	2.39	2.20	2.10	1.89
40	6287	99.47	26.41	13.75	9.29	7.14	5.91	5.12	4.57	4.17	3.13	2.69	2.30	2.11	2.01	1.80
50	6303	99.48	26.35	13.69	9.24	7.09	5.86	5.07	4.52	4.12	3.08	2.64	2.25	2.06	1.95	1.74
100	6334	99.49	26.24	13.58	9.13	6.99	5.75	4.96	4.41	4.01	2.98	2.54	2.13	1.94	1.82	1.60