Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 11. Juli 2017 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Jansen
Studiengang: IM und BW
Punkte: 14, 20, 11, 14, 11, 20 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 14 Punkte

a) Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden aus den Aussagen A, B zusammengesetzten Aussagen. Tragen Sie dazu in der folgenden Wahrheitstabelle in die Kästchen (☐) jeweils w (wahr) beziehungsweise f (falsch) ein.

A B	w w	w f	f w	f f
$\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$	w	f	f	w
$\mathsf{A} \vee \mathsf{B}$	w	w	w	f
$(\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \vee \mathsf{B})$	w	w	w	f

b) Bei einer Stadtratssitzung der Stadt Auxburg wird über den Bau eines Trimm-dich-Pfades am Königsplatz entschieden. Dabei können die insgesamt 60 Stadträte (x) folgende Voten abgeben:

- $\mathsf{F}(x)$: Stadtrat x stimmt für den Bau
- $\mathsf{G}(x)$: Stadtrat x stimmt gegen den Bau
- $\mathsf{H}(x)$: Stadtrat x enthält sich seiner Stimme

b.1) Interpretieren Sie inhaltlich die folgende Aussage: $\bigwedge_x \mathsf{F}(x)$

b.2) Begründen Sie kurz, warum die Äquivalenz

$$\bigwedge_x \overline{\mathsf{F}(x)} \Leftrightarrow \bigwedge_x \mathsf{G}(x)$$

keine Tautologie darstellt.

$G_1 \vee G_2 \vee G_3 \cdots$

$\overline{\vee G}$

b.3) Formulieren Sie mit Hilfe von $\mathsf{G}(x)$ die Aussage

„Kein Stadtrat stimmt gegen den Bau."

als Existenzaussage (mit dem Existenzquantor $\bigvee_x$).

b.4) Formulieren Sie eine zur vorherigen Teilaufgabe inhaltlich äquivalente Aussage mit Hilfe von $\mathsf{F}(x)$ und $\mathsf{H}(x)$ als Allaussage (mit dem Allquantor $\bigwedge_x$).

c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot 2^i\right) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

$n \to n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i \cdot 2^i) = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot 2^i) + (n+1) \cdot 2^{n+1}$$
$$= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1}$$
$$= [n-1+n+1] \cdot 2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^1 \cdot 2^{n+1} + 2$$

$$n \cdot 2^{n+2} + 2 = (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1} + 2$$

c.1) Überprüfen Sie dazu, dass $A(n)$ für $n = 1$ wahr ist.

c.2) Beweisen Sie den Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Lösungshinweis:

a) Wahrheitstabelle s.o.

b) b.1) Alle Stadträte stimmen für den Bau.

b.2) Stimm-Enthaltungen werden auf der linken Seite der Äquivalenz berücksichtigt, nicht jedoch auf der rechten Seite.

b.3) $\overline{\bigvee_x \mathsf{G}(x)}$

b.4) $\bigwedge_x \Big(\mathsf{F}(x) \vee \mathsf{H}(x) \Big)$

c) c.1) $\sum_{i=1}^{1} (i \cdot 2^i) = 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 \cdot 2^2 + 2$

c.2)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (i \cdot 2^i) &= \sum_{i=1}^{n} (i \cdot 2^i) + (n+1)2^{n+1} \\ &\overset{A(n)}{=} (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(2n) + 2 \\ &= n \cdot 2^{n+2} + 2\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **20 Punkte**

Um die in Schwaben inzwischen fast ausgestorbene Tierart „Auxburger Panther“ wieder anzusiedeln, wurde von den zuständigen Behörden für 2017 und die darauf folgenden 10 Jahre folgender Auswilderungsplan erarbeitet:

Zu Beginn des Jahres 2017 wurden 1000 Panther ausgesetzt, wobei in den folgenden Jahren zu Jahresbeginn jeweils 20 % weniger Tiere ausgewildert werden sollen als im Vorjahr. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass sich die Population binnen jedes Jahres jeweils um 10 % vergrößert, wobei in diesem Wachstumsfaktor sowohl geborene als auch verstorbene Tiere berücksichtigt sind.

Im Folgenden steht

- $n = 0$ für das Jahr 2017, $n = 1$ für 2018 usw.,
- die Folge (p_n) für die im Jahr n ausgesetzen Panther,
- die Reihe (s_n) für die Gesamtpopulation der Panther an Ende des Jahres n

(*Hinweis: Rechnen Sie im Folgenden auch mit nichtganzzahligen Ergebnissen*)

a) Ergänzen Sie die nebenstehende Tabelle.

b) Geben Sie eine Formel für die Folge (p_n) in Abhängigkeit von n an.

c) Geben Sie eine Formel für die Reihe (s_n) in Abhängigkeit von n an.

d) Benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe und geben Sie die Formel für die Reihe (s_n) ohne Summe an.

Jahr	n	p_n	s_n
2017	0	1000	1100
2018	1	800	2090
2019	2	640	3003
2020	3	512	3866.5
⋮	⋮	⋮	⋮
2027	10	107.37	10 146.46

R

e) Geben Sie R-Befehle an, mit denen Sie den Bestand an „Auxburger Panthern“ am Ende des Jahres 2027 bestimmen können.

$n=0$ 1000

$n=1$ $1000 \cdot 0.8$

$n=2$ $1000 \cdot 0.8^2$

$n=3$

$1000 \cdot 1.1$

$(1000 \cdot 1.1 + 1000 \cdot 0.8) \cdot 1.1 = 1000 \cdot [1.1^2 + 0.8 \cdot 1.1]$

$1000 [(1.1^2 + 0.8 \cdot 1.1 + 0.8^2) \cdot 1.1]$

$= 1000 [1.1^3 + 0.8 \cdot 1.1^2 + 0.8^2 \cdot 1.1]$

$= 1000 [1.1^4 + 0.8 \cdot 1.1^3 + 0.8^2 \cdot 1.1^2 + 0.8^3 \cdot 1.1]$

Lösungshinweis:

a) s.o.

b) $p_{\text{Jahr}} = 1000 \cdot 0.8^{\text{Jahr}-2017}$, $p_n = 1000 \cdot 0.8^n$

c) $$s_n = \sum_{i=0}^{n} 1000 \cdot 0.8^i \cdot 1.1^{n+1-i}$$

$$= 1000 \cdot 1.1^{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{0.8}{1.1}\right)^i$$

d) $$s_n = 1000 \cdot 1.1^{n+1} \cdot \frac{(0.8/1.1)^{n+1} - 1}{(0.8/1.1) - 1}$$

e)

```
s.Jahr = function(Jahr){sn(Jahr-2017)}
sn = function(n){
  i=0:(n);
  round(1000 * sum(1.1^((n) + 1 - i) * 0.8^i), 2)
}

s.Jahr(2027)

## [1] 10146.46

# alternativ (ohne Summe):
sn = function(n) {
  1000 * 1.1^(n + 1) *
  ((0.8/1.1)^(n + 1) - 1) / ((0.8/1.1) - 1)
}
```

$n: 1000 \cdot [1.1^{n+1} + 0.8^1 \cdot 1.1^n + \dots$
$\dots + 0.8^n \cdot 1.1]$

$= 1000 \cdot 1.1^{n+1} \cdot [1 + 0.8 \cdot 1.1^{-1}$
$+ \dots + 0.8^n \cdot 1.1^{-n}]$

$= 1000 \cdot 1.1^{n+1} \cdot [(\frac{0.8}{1.1})^0 + (\frac{0.8}{1.1})^1$
$+ \dots + (\frac{0.8}{1.1})^n]$

Aufgabe 3 **11 Punkte**

Zur Beschreibung des kumulierten Absatze eines Produktes werden gelegentlich sogenannte *logistische Funktionen* verwendet. Gegeben ist hier $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Zeit t mit

$$f(t) = a \cdot \left(1 + 9 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot b \cdot t}\right)^{-1} .$$

Dabei bezeichnen $a, b > 0$ Konstanten.

a) Berechnen Sie die Sättigungsgrenze, also $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$.

b) Zeigen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 10 % der Sättigungsgrenze erreicht sind.

c) Zeigen Sie, dass f zum Zeitpunkt

$$t_{0.5} = \frac{\ln 9}{ab}$$

genau 50 % der Sättigungsgrenze erreicht hat.

d) Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

$$f'(t) = a \cdot (-1) \cdot (1+9e^{-abt})^{-2} \cdot 9 \cdot e^{-abt} \cdot (-ab)$$

$$= \frac{9a^2 b e^{-abt}}{(1+9e^{-abt})^2}$$

e) Für die zweite Ableitung von f gilt:

$$f''(t) = -9a^3b^2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{abt}\left(\mathrm{e}^{abt} - 9\right)}{\left(\mathrm{e}^{abt} + 9\right)^3}$$

(Dieses Ergebnis müssen Sie *nicht* nachrechnen)
Zeigen Sie, dass f für $t_{0.5}$ einen Wendepunkt hat.

Lösungshinweis:

a) $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = a \cdot \left(1 + 9 \cdot \lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-a \cdot b \cdot t}\right)^{-1} = a \cdot (1 + 9 \cdot 0)^{-1} = a$

b) $f(0) = a \cdot \left(1 + 9 \cdot \mathrm{e}^0\right)^{-1} = a/(1+9) = 0.1 \cdot a$

c) $$f\left(\frac{\ln 9}{ab}\right) = a \cdot \left(1 + 9 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot b \cdot \frac{\ln 9}{ab}}\right)^{-1} = a \cdot \left(1 + 9 \cdot \mathrm{e}^{-\ln 9}\right)^{-1}$$
$$= a \cdot \left(1 + \frac{9}{9}\right)^{-1} = a/(1+1) = 0.5 \cdot a$$

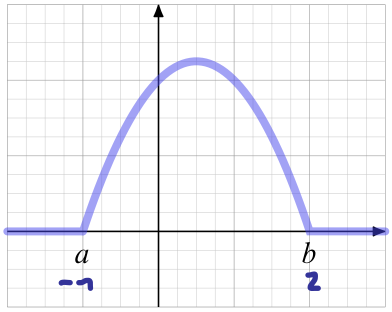
d) $$f'(t) = 9a^2b \cdot \mathrm{e}^{-abt} \cdot \left(1 + 9 \cdot \mathrm{e}^{-abt}\right)^{-2}$$
$$= 9a^2b \cdot \frac{\mathrm{e}^{abt}}{\left(\mathrm{e}^{abt} + 9\right)^2}$$

e) Die Terme $9a^3b^2$, e^{abt}, $\left(\mathrm{e}^{abt} + 9\right)^3$ haben konstantes Vorzeichen für alle $t \geqq 0$, nur der Term $\mathrm{e}^{abt} - 9$ wechselt das Vorzeichen bei

$$\mathrm{e}^{abt} - 9 = 0 \Leftrightarrow abt = \ln 9 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 9}{ab}$$

Aufgabe 4 **14 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und ihr Graph (siehe Abbildung rechts) mit



$$f(x) = \begin{cases} A(x-2)(x+1) & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Zeichnen Sie Koordinatenachsen in die Abbildung ein, die sich im Punkt $(0,0)$ schneiden und geben Sie die Werte für a und b an.

b) Eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn gilt:

$$g(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Bestimmen Sie den Parameter $A \in \mathbb{R}$ so, dass f eine Dichtefunktion ist.

Lösungshinweis:

a) Achsen: S.o.
a, b sind die beiden Nullstellen von f, also $a = -1$ und $b = 2$.

b) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = A \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2\,\mathrm{d}x = A\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2}$

$= A\left(\frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right) = -\frac{9}{2}A$

$\Rightarrow\ A = -\frac{2}{9}.$

Aufgabe 5 **11 Punkte**

Tom Bombadill möchte sich heute, am 1. Januar 2017, Wohnzimmermöbel für 30 000 € kaufen. Der Möbelladen bietet ihm an, dass er die Rechnung über 5 Jahre zu einem Zinssatz von 1.5 % p. a. jährlich nachschüssig mit gleich hohen Zahlungen begleichen kann.

a) Wie hoch wären die jährlichen Raten für Tom?

b) Angenommen Tom könnte vorschüssig statt nachschüssig bezahlen. Wären die Raten dann höher oder niedriger als in Teilaufgabe a)? (Begründung ohne Rechnung)

c) Tom einigt sich mit dem Möbelgeschäft auf quartalsweise vorschüssige Zahlungen. Wie hoch sind die Raten in diesem Fall?

Lösungshinweis:

a) $R_0 = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \Leftrightarrow r = R_0 \cdot \dfrac{q-1}{1-q^{-n}} = 30\,000 \cdot \dfrac{1.015 - 1}{1 - 1.015^{-5}} = 6272.68$

b) ~~Höher~~ niedriger, die Zinsen sind ~~höher~~ n., denn Tom schuldet der Bank ~~länger~~ mehr Geld.

c) ICMA: $q_{\text{Quartal}} = q^{\frac{1}{12}} \approx 1.003\,729\,1$ und $n = 12 \cdot 5 = 20$

$$r = R_0 \cdot \frac{1 - \frac{1}{q_{\text{Quartal}}}}{1 - q_{\text{Quartal}}^{-n}} \approx 30\,000 \cdot \frac{1 - {}^{1}\!/_{1.003\,729\,088\,938\,09}}{1 - 1.003\,729\,088\,938\,09^{-20}} \approx 1553.63$$

Alternativ mit Rentenersatzrate:

$$r_e = r \cdot \left(4 + i \cdot \frac{4+1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = r_e \cdot \left(4 + i \cdot \frac{5}{2}\right)^{-1} = 6272.68 \cdot \left(4 + 0.015 \cdot \frac{5}{2}\right)^{-1} \approx 1553.60$$

Aufgabe 6 **20 Punkte**

Gegeben ist eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ und ein Vektor $d \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 28 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = d$ mit Hilfe der inversen Matrix von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

$$\begin{array}{c|cc|cc|l}
1 & 1 & 5 & 1 & 0 & \\
2 & 2 & -2 & 0 & 1 & \\
\hline
3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 0 & -12 & -2 & 1 & 2 - 2 \cdot 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1/6 & 5/12 & 3 + 5/12 \cdot 4 \\
 & 0 & 1 & \underbrace{1/6 \quad -1/12}_{A^{-1}} & & -1/12 \cdot 4
\end{array}$$

Lösungshinweis:

a) Inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/12 \\ 1/6 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$x = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/12 \\ 1/6 & -1/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \cdot 28 + 5/12 \cdot (-16) \\ 1/6 \cdot 28 - 1/12 \cdot (-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) ▶ Für das charakteristische Polynom ergibt sich:

$$0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-2-\lambda) - 10 = \lambda^2 + \lambda - 12.$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -4$.

▶ Für die beiden Eigenvektoren müssen die nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssysteme $(A - \lambda_i)x_i = 0$ gefunden werden. Es ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x^{I} = 0, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x^{II} = 0.$$

$2x_1 - 5x_2 = 0$

$x_1 = \frac{5}{2} x_2$

Die Lösungen kann man gleich ablesen:

$$x^{I} = \lambda \cancel{[illegible]} \quad \text{und} \quad x^{II} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$