Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Organisation

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2017/18					
Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	04.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W1.19	09.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W3.20	10.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	W1.19	11.10.2017
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.05	11.10.2017
Übung Mathematik	Henle	Mi	11.30-13.00	W1.06	08.11.2017
Übung Mathematik	Henle	Do	11.30-13.00	J4.13	02.11.2017
Übung Mathematik	Henle	Do	13.15-14.45	J4.13	02.11.2017
Übung Mathematik	Burkart	Do	13.00-14.30	W1.01	19.10.2017
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.30-16.00	W1.01	19.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Mo	13.30-16.00	B3.05	09.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.00	B3.05	11.10.2017
Offener Matheraum	?/Jansen	Do	11.30-15.00	B3.05	12.10.2017
Offener Matheraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2018					
Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	10.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mo	11.30-14.00	B3.05	09.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.30	B3.05	11.10.2017
Offener Statistikraum	?/Jansen	Do	12.00-15.00	B3.05	12.10.2017
Offener Statistikraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	12.10.2017
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	12.10.2017

Eigenschaften von Funktionen

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
3.1. Grundlagen
3.2. Beziehungen
3.3. Relationen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Beispiel

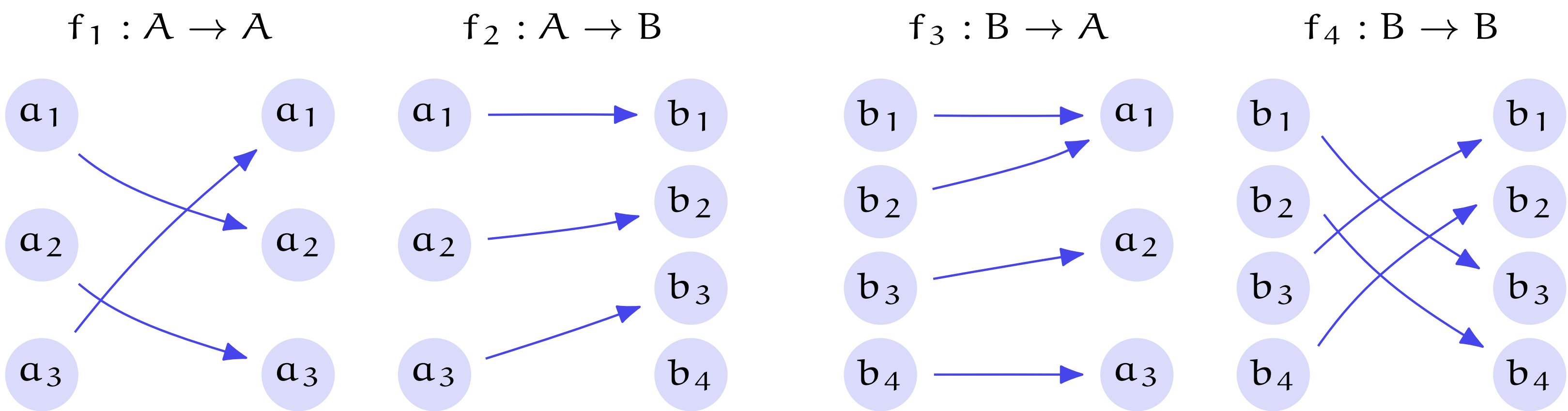
- Gegeben: $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

- Funktionen f_1, f_2:

$a \in A$	a_1	a_2	a_3
$f_1(a)$	a_2	a_3	a_1
$f_2(a)$	b_1	b_2	b_3

- Funktionen f_3, f_4:

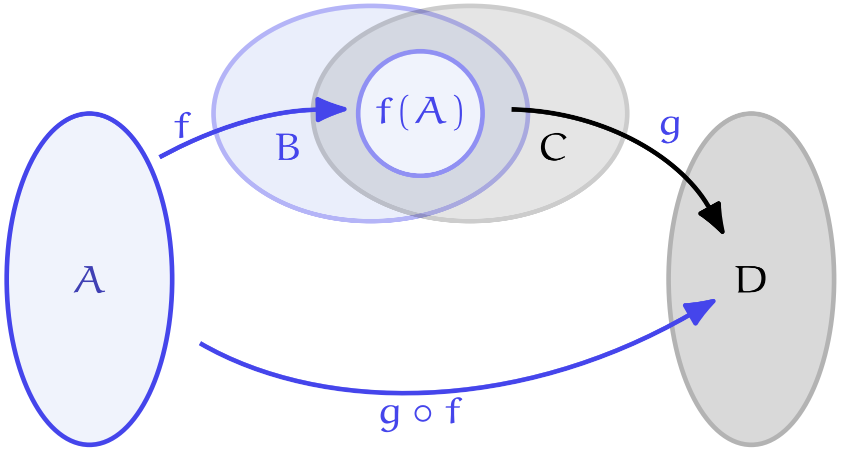
$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_3(b)$	a_1	a_1	a_2	a_3
$f_4(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2



Die Funktionen f_1, f_4 sind bijektiv, f_2 ist injektiv, f_3 ist surjektiv.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ und $f(D_f) \subseteq D_g$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to W_f$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ für alle $x \in D_f$



Komposition von f und g

$a_1 \to a_3$
$a_2 \to a_1$
$a_3 \to a_2$

$f_1 \circ f_1$

Beispiel (Folie 69): Aus f_1, f_4 bijektiv, f_2 injektiv und f_3 surjektiv folgt

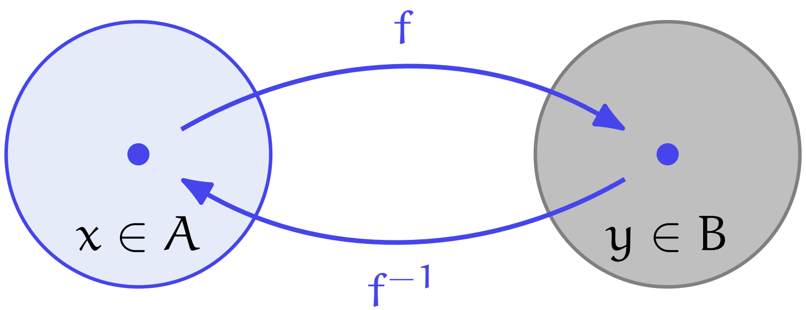
$f_1 \circ f_1 : A \to A$, $f_4 \circ f_4 : B \to B$	bijektiv
$f_2 \circ f_1 : A \to B$, $f_4 \circ f_2 : A \to B$	injektiv
$f_1 \circ f_3 : B \to A$, $f_3 \circ f_4 : B \to A$	surjektiv
$f_2 \circ f_3 : B \to B$, $f_3 \circ f_2 : A \to A$	weder surjektiv, noch injektiv

Wegen $A \neq B$ sind alle weiteren Kompositionen $f_1 \circ f_2$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_2$, $f_2 \circ f_4$, $f_3 \circ f_1$, $f_3 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_4 \circ f_3$ nicht möglich.

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
3.1. Grundlagen
3.2. Beziehungen
3.3. Relationen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Inverse Funktion

- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- Inverse Funktion oder Umkehrabbildung: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird
- Für (bijektive) Kompositionen gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Umkehrabbildung f^{-1} von $f : A \to B$

Beispiel (Folie 69): Wir erhalten die inversen Abbildungen $f_1{}^{-1}$, $f_2{}^{-1} : B \to B$ mit den Wertetabellen:

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_1{}^{-1}(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2
$f_2{}^{-1}(b)$	b_1	b_4	b_2	b_3

Ferner existieren die Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $(f_2 \circ f_1)$ sowie
$(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ und
$(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ mit

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$(f_1 \circ f_2)(b)$	b_3	b_1	b_2	b_4
$(f_1 \circ f_2)^{-1}(b)$	b_2	b_3	b_1	b_4
$(f_2 \circ f_1)(b)$	b_4	b_2	b_1	b_3
$(f_2 \circ f_1)^{-1}(b)$	b_3	b_2	b_4	b_1

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
3.1. Grundlagen
3.2. Beziehungen
3.3. Relationen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Grundlagentest Mengen!

Testfrage: Mengen 1

Teilmengen

Gegeben sind die Mengen

$$X = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad Y_1 = \{\}, \quad Y_2 = \{0, -1\}, \quad Y_3 = \{1, 0, -2\}$$

Welche Mengen sind Teilmengen von X?

- A $Y_2 \cup \{-2\}$
- B Y_2 und Y_3
- C $\{2\}$ und Y_1
- D Jedes Y_i mit $i = 1, 2, 3$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: C

Testfrage: Mengen 2

Gegeben sind folgende Mengen:

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6\}, \quad C = \{4, 2\} \text{ und } D = \{\}.$$

Welche Aussagen sind jeweils alle wahr?

- A $4 \in A$, $D \subseteq C$, $A \cap B = \{4\}$
- B $\{4\} \in A$, $D \supset C$, $A \cap B = 4$
- C $4 \subseteq A$, $C \in D$, $A \cup B = \{4\}$
- D $\{4\} \subseteq A$, $D \subseteq C$, $A \cup B = \{4\}$
- E Ich kann das nicht oder in jeder Variante stimmt was nicht.

Richtig: A

pingo.upb.de/252598

Wie viele Teilmengen der Buchstabenmenge $M = \{x, p, q, y\}$ mit höchstens zwei Elementen gibt es?

$\hat{=}$ höchstens 2 El.

- A 4
- B 8
- C 11
- D 16
- E was anderes

11

$\{ \{ \}, \{x\}, \{p\}, \{q\},$
$\{y\}, \{x,p\}, \{x,q\}, \{x,y\},$
$\{p,q\}, \{p,y\}, \{q,y\}, \{p,q,y\},$
$\{x,q,y\}, \{x,p,y\}, \{x,p,q\}, \{x,p,q,y\} \}$

Richtig: C

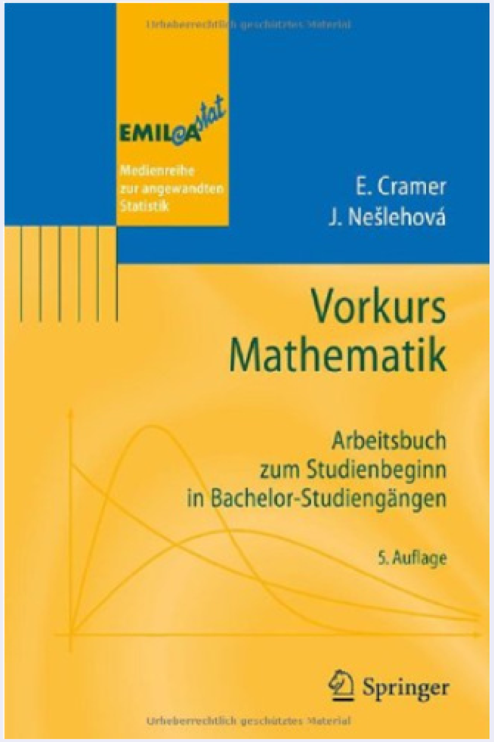
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Mengenmäßig ist alles in Ordnung!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.13-2.19 aus dem Buch!
- 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.7-2.19 aus dem Buch!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.1-2.19 aus dem Buch!

Übungsmaterial

S. 64ff., Aufgaben 2.1 - 2.19 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Gliederung

1 Grundlegende Bausteine
2 Aussagenlogik
3 Mengen
4 Folgen und Reihen
5 Reelle Funktionen
6 Differentialrechnung
7 Integration
8 Finanzmathematik
9 Lineare Algebra

Opitz u.a., (2017, Kapitel 8)

4 Folgen und Reihen
- Eigenschaften und Beispiele
- Konvergenz und Grenzwert
- Reihen

Warum beschäftigen wir uns mit Folgen und Reihen?

- Analyse von Datensequenzen, insbesondere Modellierung diskreter, zeitlicher Entwicklungen (z.B. von Aktienkursen, Absatzmengen)
- Grundlage der Finanzmathematik (z.B. Zinseszinsrechnung, Tilgungsrechnung)
- wesentlich zum Verständnis der Konzepte der Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wesentliche Lernziele:

- Verständnis der Begriffe Folgen und Reihen
- Fähigkeit Folgen und Reihen nach ihrer Art zu klassifizieren
- Kennenlernen typischer, insbesondere der Grenzwerteigenschaften von Folgen und Reihen
- Fähigkeit, diese Eigenschaften zu erkennen und nachzuweisen

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Definition und Eigenschaften

Definition

- Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
- Schreibweise für Folgenglieder: $a(0), a(1), \ldots$ oder $a_0, a_1, \ldots$
- Schreibweise für Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder (a_n)

Leonardo von Pisa
(ca. 1180 - 1250)

Eigenschaften: Eine Folge heißt

- endlich (unendlich), falls Anzahl der Folgenglieder endlich (unendlich) ist
- gesetzmäßig gebildet, falls Folgenglieder einem Bildungsgesetz folgen, zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{n+1}$

n	0	1	2	3	...	100
a_n	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$	...	$1/101$

- rekursiv definiert, falls zur Berechnung eines Folgengliedes frühere Werte nötig sind
  Beispiel: $a_0 = 0;\ a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 1$
  (Fibonacci-Folge)

$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$
$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	...

Spezielle Folgen

- Arithmetische Folge: $(a_n): \ a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $d \in \mathbb{R}$
- Geometrische Folge: $(a_n): \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $q \in \mathbb{R}$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Beispiel: $a: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$,

n	0	1	2	3	⋯ 10 ⋯	100
a_n	2.5	2.25	2	1.75	⋯ 0 ⋯	-22.5

$a_n = 2.5 - \frac{1}{4} n$

↳ explizite Darstellung

rekursiv: $a_0 = 2.5$, $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{4}$

allgemein $\boxed{a_n = s + d \cdot n}$ $d, s \in \mathbb{R}$

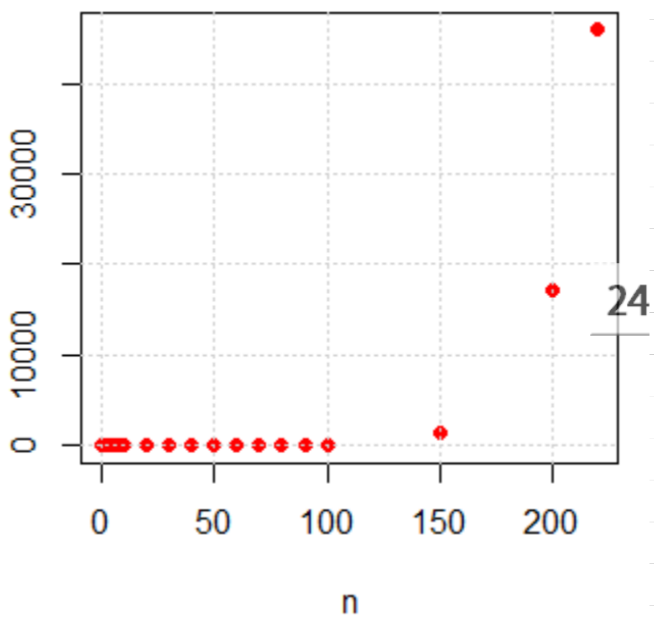
arithmetische Folge

Beispiel: $a_n = 1{,}00 \cdot 1.05^n$

rekursiv: $a_0 = 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.05$

n	an.n.
0	1.000000
1	1.050000
2	1.102500
3	1.157625
4	1.215506
5	1.276282
6	1.340096
7	1.407100
8	1.477455
9	1.551328
10	1.628895
20	2.653298
30	4.321942
40	7.039989
50	11.467400
60	18.679186
70	30.426426
80	49.561441
90	80.730365
100	131.501258
150	1507.977496
200	17292.580815
220	45882.364993



allgemein: $\boxed{a_n = s \cdot q^n}$ $s, q \in \mathbb{R}$

geometrische Folge

Konvergenz bzw. Grenzwert einer Folge

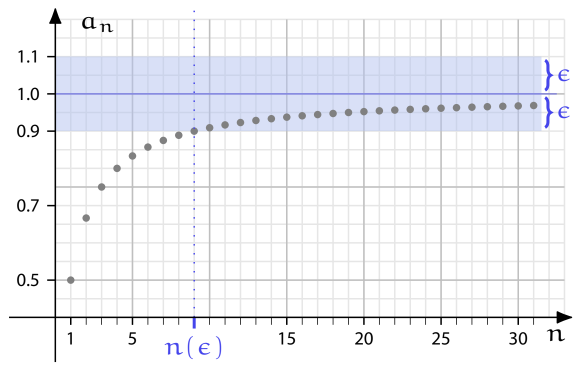
Definition: $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0 : \;\; |a_n - a| < \varepsilon$$

Für jedes (noch so kleine) positive epsilon
gibt es eine Grenze $n_0 \in \mathbb{N}$ (natürliche Zahl)
ab der alle Folgenelemente a_n $(n > n_0)$
höchstens um ε abweichen von dem Grenzwert a

Beispiel: $a_n = \frac{n}{n+1}$ Vermutung: Grenzwert a ist 1

n	an.n.
0	0.0000000
1	0.5000000
2	0.6666667
3	0.7500000
4	0.8000000
5	0.8333333
6	0.8571429
7	0.8750000
8	0.8888889
9	0.9000000
10	0.9090909
100	0.9900990
1000	0.9990010
10000	0.9999000



Folge (a_n) mit $n(\epsilon) = 9$ für $\epsilon = 0.1$.

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\iff \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \left| -\frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

z.B. $\varepsilon = 10^{-9}$: $n > \frac{1}{10^{-9}} - 1 = 10^9 - 1$
$= 999\,999\,999$

Geometrische Folge: Beispiel Schachspiel

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

- Sissa ibn Dahir, der Erfinder des Schachspieles, darf sich vom indischen König Shihram eine Belohnung wünschen.
- Sein Wunsch: So viele Weizenkörner, wie man auf ein Schachbrett legen kann, wenn

1. Feld	:	$a_0 = 1$	Korn
2. Feld	:	$a_1 = 2$	Körner
3. Feld	:	$a_2 = 4$	Körner
4. Feld	:	$a_3 = 8$	Körner
		$\vdots$	
n. Feld	:	$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2}$	Körner

- Fragen: Bleiben Folgenglieder ab einem gewissen n in einen kleinen Bereich um einen festen Wert?
- Und: Kann man diesen Bereich beliebig verkleinern?
- Definition:

$a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes von (a_n) $\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n(\epsilon) \quad \text{mit} \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > n(\epsilon)$$

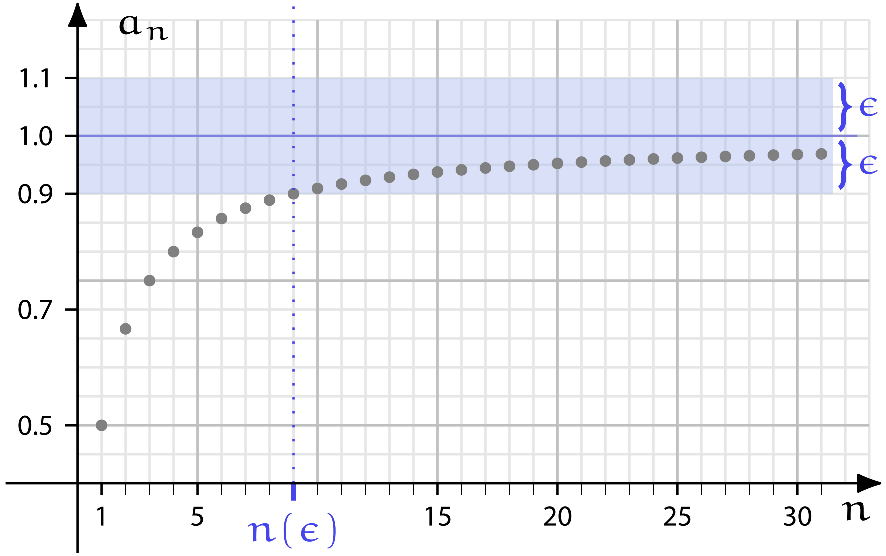
- Schreibweise für Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- Existiert dieser Grenzwert, heißt die Folge konvergent
- Ist der Grenzwert $a = 0$, heißt die Folge Nullfolge
- Existiert kein Grenzwert, heißt die Folge divergent

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Beispiel zur Definition des Grenzwerts

- Gegeben: $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Vermutung:
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 1$
- Beweis: Wenn $a = 1$, dann folgt

$$
\begin{aligned}
& |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\epsilon} < n+1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\epsilon} - 1 < n
\end{aligned}
$$



Folge (a_n) mit $n(\epsilon) = 9$ für $\epsilon = 0.1$.

- Also: Für jedes ϵ findet man ein $n(\epsilon)$, so dass die Grenzwertbedingung stimmt
- Zum Beispiel: Wähle
  $\epsilon = 0.1 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{0.1} - 1 = 10 - 1 = 9$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Gegeben:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$
- kurz: $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$

Dann gilt:

- $(a_n + b_n) \to a + b$
- $(a_n - b_n) \to a - b$
- $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
- $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $(a_n^c) \to a^c$
  $(a_n > 0,\ a > 0,\ c \in \mathbb{R})$
- $(c^{a_n}) \to c^a \quad (c > 0)$

Beispiel (Grenzwertsätze)

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\,(n^2+2n^3)}{n\,(n-5\sqrt{n^5})} = \frac{n^{5/2}+2n^{7/2}}{n^2-5n^{7/2}}$$

$$\frac{n^{5/2}}{n^{7/2}} = n^{5/2-7/2} = n^{-1} = \frac{1}{n}$$

$$n^{2-7/2} = n^{-1.5} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1.5}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}+2}{\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}-5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+2}{0^{3/2}-5} = \frac{2}{-5} = -0.4$$

teile im Zähler und im Nenner durch höchste Potenz von n (hier: $n^{7/2}$)

Vermutung: $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$

$|a_n - a| < \varepsilon$

Beweis: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{n}$ konvergiert mit Grenzwert 0

Reihen ≙ Summe von Folgenelementen

Beispiel: $S_n = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{2.5-0.25\cdot i}_{a_i}$

n	0	1	2	3	....	10	...	100
a_n	2.5	2.25	2.0	1.75	...	0	...	-22.5
s_n	2.5	4.75	6.75	8.5	...	13.75		-1010

$S_1 = \sum_{i=0}^{1} 2.5-0.25i = (2.5-0.25\cdot 0)+(2.5-0.25\cdot 1)$

$S_2 = \sum_{i=0}^{2} a_i = a_0+a_1+a_2 = 2.5+2.25+2.0$

$$S_{10} = \sum_{i=0}^{10} a_i = (2.5-0.25\cdot 0)+(2.5-0.25\cdot 1)+\dots+(2.5-0.25\cdot 10)$$

$$= 2.5\cdot(10+1) - 0.25\cdot(\underbrace{0+1+2+\dots+10}_{(1+10)\cdot\frac{10}{2}})$$

$$= (10+1)\cdot\left[2.5-0.25\cdot\frac{10}{2}\right] = 13.75$$

allgemein: $S_n = \sum_{i=0}^{n} 2.5-0.25\cdot i = (n+1)\cdot\left[2.5-0.25\cdot\frac{n}{2}\right]$

ganz allgemein: $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} s+d\cdot i = (n+1)\cdot\left[s+d\cdot\frac{n}{2}\right]}$

arithmetische Reihe

Beispiel: $S_n = \sum_{i=0}^{n} 1\cdot 1.05^i$

n	an	sn
0	1.000000	1.000000
1	1.050000	2.050000
2	1.102500	3.152500
3	1.157625	4.310125
10	1.628895	14.206787
100	131.501258	2741.526415

[Exkurs: $(x^0+x^1+\dots+x^n)\cdot(x-1)$

$$= \cancel{x^1}+\cancel{x^2}+\dots+\cancel{x^n}+x^{n+1}$$
$$-x^0-\cancel{x^1}-\cancel{x^2}-\dots-\cancel{x^n}$$

$$= x^{n+1}-1$$

$$\iff x^0+x^1+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$]

$$S_{10} = 1\cdot 1.05^0 + 1\cdot 1.05^1+\dots+1\cdot 1.05^{10}$$

$$= 1\cdot(1.05^0+1.05^1+\dots+1.05^{10})$$

$$= 1\cdot\frac{1.05^{11}-1}{1.05-1} \approx 14.206787$$

allgemein: $S_n = \sum_{i=0}^{n} 1\cdot 1.05^i = 1\cdot\frac{1.05^{n+1}-1}{1.05-1}$

ganz allgemein: $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} s\cdot q^i = s\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$

geometrische Reihe

Definition der Reihe

- Gegeben: (a_n) unendliche Folge in $\mathbb{R}$
- Dann heißt (s_n) mit

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

eine unendliche Reihe.

- s_n heißt n-te Partialsumme
- Klar ist: Reihen sind spezielle Folgen

Beispiel:

- (a_n) geometrische Folge $\rightarrow$ (s_n) geometrische Reihe
- $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \,; \quad \text{mit} \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- Offensichtlich gilt: $a_n = a_{n-1}\,q = a_{n-2}\,q^2 = \ldots = a_0\,q^n$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1-q^{64}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Geometrische Reihe: Beispiel Schachspiel

- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1-q^{64}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

- Das bedeutet:

100 Körner $\triangleq$ 1 g Weizen $\longrightarrow$ $1{,}8 \cdot 10^{17}\,\mathrm{g}$
$\longrightarrow$ $1{,}8 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}$
$\longrightarrow$ $1{,}8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{t} = 180$ Mrd. t

1 Güterwagon $\triangleq$ $50\,\mathrm{t}$ Weizen $\longrightarrow$ 3,6 Mrd. Güterwagons
$\longrightarrow$ 36 Mrd. m langer Eisenbahnzug
$\longrightarrow$ 36 Mill. km

$\longrightarrow$ 100-fache Entfernung zwischen Erde und Mond

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Konvergenzkriterien für Reihen

Gegeben: a_i Folge, $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Divergenzkriterium

- Ist s_n konvergent $\Rightarrow$ a_i ist Nullfolge
- Also äquivalent dazu:

$$a_i \text{ ist keine Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

Beispiel: $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ $\rightarrow a_i$

Quotientenkriterium

Quotienkrit: $\left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow s_n$ konvergiert

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

- Bemerkung: Für $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich
- Spezialfall geometrische Reihe:

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent} \\ q \geqslant 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent} \end{cases}$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
4.1. Eigenschaften und Beispiele
4.2. Konvergenz und Grenzwert
4.3. Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Ende 8.11.2017