Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

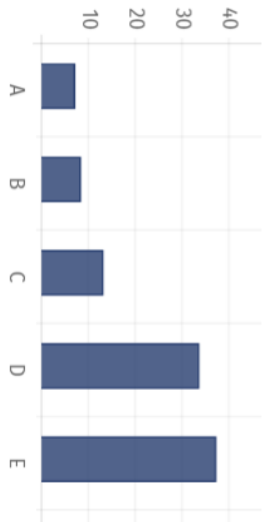
04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Grundlagentest
Ungleichungen!

Testfrage: Ungleichungen 1

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{2}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}$ beträgt



A $(-\infty;-1) \cup (1;3]$

B $(-1;1)$

C $\{-3,-1,1\}$

D $(-\infty;-3] \cup (-1;1)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

$\frac{2}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \le 0$

Richtig: D, denn

$$\frac{2(x+1)-1(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow L = (-\infty;-3] \cup (-1;1)$$

	-3	-2	-1	0	1	
$x+3$	- - - 0 +	+	+	+	+	+ +
$x-1$	- - -	- -	- -	- -	- - 0 +	+ +
$x+1$	- - -	- -	- - 0 +	+	+	+ +
$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$	- - - 0 +	+ +	+ n.d.	- -	- n.d.	+ + +

$\rightarrow (-\infty;-3] \cup (-1;1)$

Testfrage: Ungleichungen 2

Zähler:
Nenner:

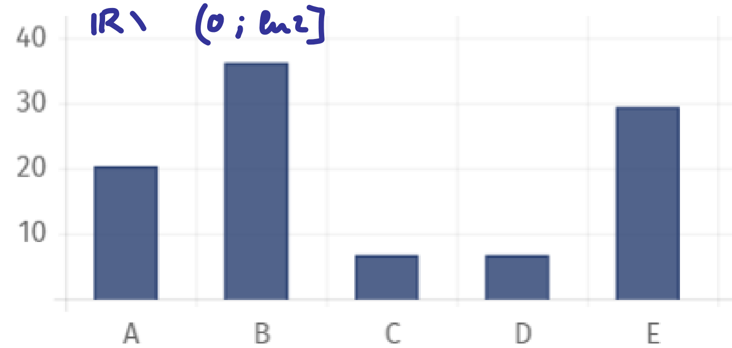
$e^t \geq 1 \iff t \geq \ln 1 = 0$
$e^t \geq 2 \iff t \geq \ln 2 \approx 0.69$

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{e^t - 1}{e^t - 2} \geqslant 0$ beträgt

$e^t - 1$: $- - - - - 0 + + + + +$
$e^t - 2$: $- - - - - - - - 0 + + + +$
$\dfrac{e^t-1}{e^t-2}$: $\underbrace{+ + + +}_{t \leq 0}\; 0 - - - \;\underbrace{+ + + +}_{t > \ln 2}$

$(-\infty; 0] \cup (\ln 2; \infty)$
$\mathbb{R} \setminus (0; \ln 2]$

- A $(-\infty; \infty)$
- B $(-\infty; 0] \cup (\ln 2; \infty)$
- C $(0; \ln 2)$
- D $(-\infty; \ln 2)$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: B, denn

$$\frac{e^t - 1}{e^t - 2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \text{Zähler und Nenner } \overset{\leqslant}{\cancel{\geqslant}} 0 \quad \text{oder} \quad \text{Z. und N. } \overset{\geqslant}{\leqslant} 0$$

$$\Leftrightarrow t \leqslant 0 \text{ und } t < \ln 2 \quad \text{oder} \quad t \geqslant 0 \text{ und } t > \ln 2$$

$$\Leftrightarrow t \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad t > \ln 2$$

Testfrage: Ungleichungen 3

Die Lösungsmenge der Ungleichung $-y^4 - y^2 - 1 \leqslant 0$ ist

A $\{\}$ (leere Menge)

B $(-\infty; \infty)$

C $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2};\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

D $(-\infty;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2};\ \infty)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: B (alle Summanden sind negativ)

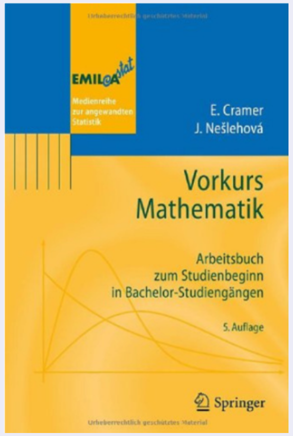
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten korrekt: Alles richtig ungleich!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 8.1 und 8.2 aus dem ersten Buch!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 8.1-8.4 aus dem ersten Buch!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 8.1-8.6 aus dem ersten Buch sowie die Aufgabe 23 aus dem zweiten Buch!

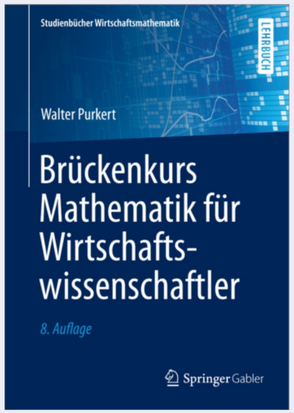
Übungsmaterial

Aufgaben 8.1-8.6 aus



http://goo.gl/qHwN7X

S. 61: Aufgabe 23 aus



http://goo.gl/2D1oYo

Gliederung

Opitz u.a., (2017, Kapitel 11, 12.1, 12.2)

6 Differentialrechnung

- Differentialquotient und Ableitung
- Änderungsrate und Elastizität
- Kurvendiskussion

Anwendungen

- Analyse und ökonomische Interpretation wirtschaftswissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten durch Untersuchung der Charakteristika von Funktionen
- Ermittlung von optimalen Lösungen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme wie zum Beispiel Absatzmengenplanung, Loßgrößenplanung etc.

Wesentliche Lernziele

- Verständnis des Differentialquotienten
- Fähigkeit, eine Funktion zu differenzieren
- Bestimmung und Interpretation von Änderungsraten und Elastizitäten
- Durchführung und Interpretation von Kurvendiskussionen

Preisbestimmung beim Angebotsmonopol

Bekannt sind folgende Zusammenhänge:

- $p(x) = c_1 - c_2 x$ (Preis-Absatz-Funktion)
- $K(x) = c_3 + c_4 x$ (Kostenfunktion)
- (mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ Konstanten)

Damit ergibt sich:

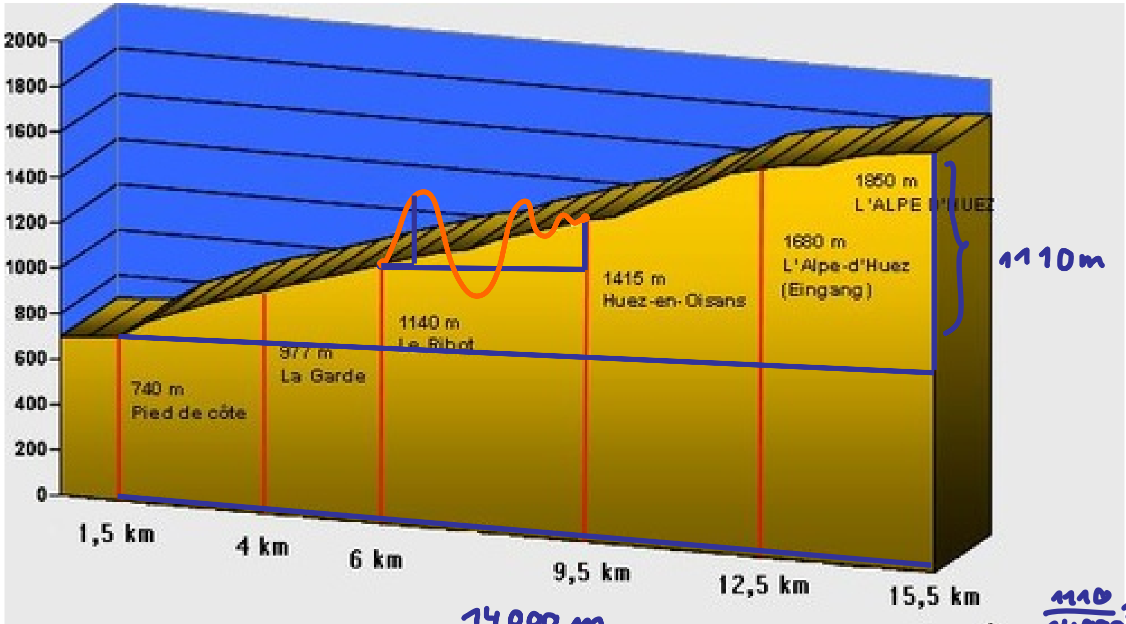
- Umsatzfunktion: $U(x) = c_1 x - c_2 x^2$
- Gewinnfunktion: $G(x) = U(x) - K(x) = c_1 x - c_2 x^2 - (c_3 + c_4 x)$

Fragen:

- Welche Menge/Welcher Preis ist Umsatz-/Gewinnmaximal?
- Welche Veränderung des Umsatzes ergibt sich bei einer Veränderung der Absatzmenge?

Differenzenquotient: Idee

- Tour de France: Anstieg nach L'Alpe d'Huez
- Länge des Anstiegs: 13,9 km
- Auf einer Höhe von 740 m beginnen die 21 Kehren
- Zielankunft liegt auf 1850 m
- Bestimmung von Steigungen: $\dfrac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Distanz}}$



1110m

14000 m

$\frac{1110}{14000} \approx 0.079$

Differenzenquotient

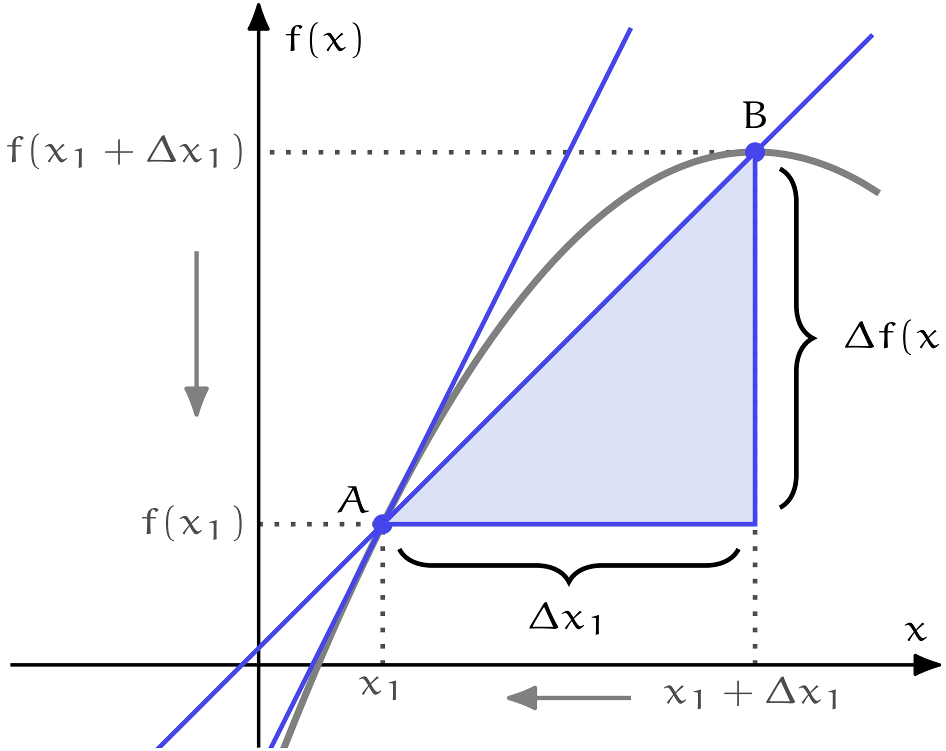
- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$
- Dann heißt der Ausdruck

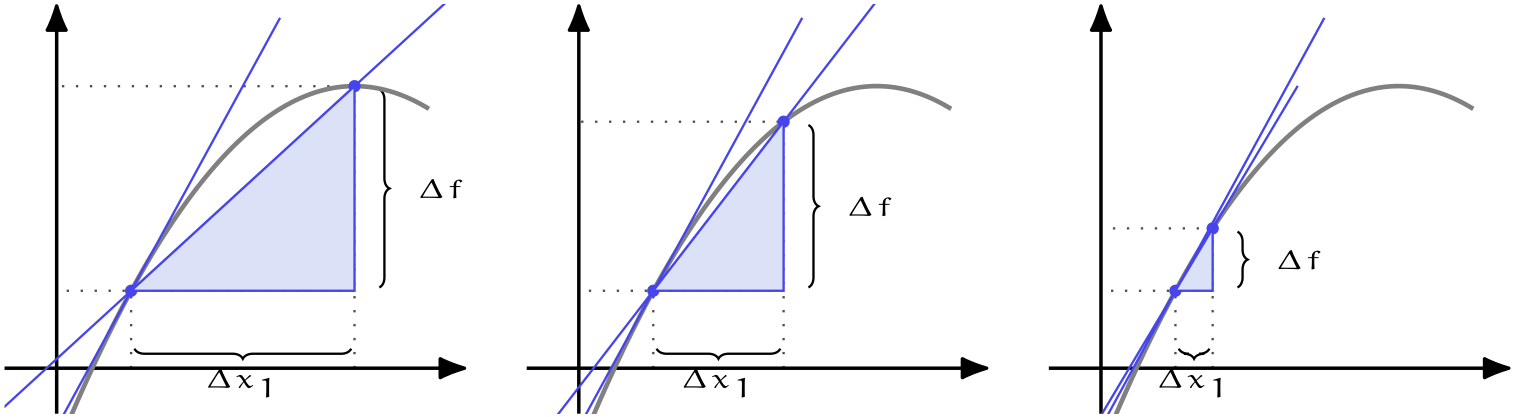
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Differenzenquotient (Steigung) von f im Intervall $[x_1, x_2] \subseteq D$

- Alternative Schreibweise, dabei Ersetzen von x_2 durch $x_1 + \Delta x_1$:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$





Differentialquotient einer reellen Funktion

Differentialquotient

- Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_1 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

existiert.

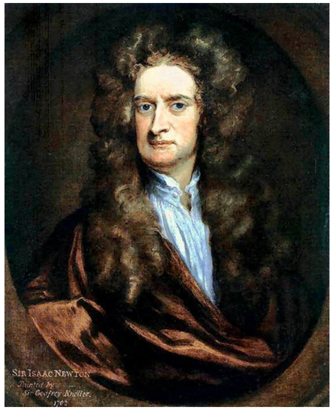
- Ist f an der Stelle x_1 differenzierbar, heißt

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \frac{df}{dx_1}(x_1) = f'(x_1) \end{aligned}$$

Differentialquotient oder erste Ableitung von f an der Stelle x_1.

- f heißt in D differenzierbar, wenn f für alle $x \in D$ differenzierbar ist.

G. W. Leibniz
(1646-1716)



I. Newton
(1643-1727)

Beispiel (Differenzenquotient → Differentialquotient)

$f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x\cdot\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2x$$

$\frac{df}{dx}(x) = 2x$, $f'(x) = 2x$

Differentialquotient von f

„d f nach d x (von x)"

1. Ableitung von f

Wichtige Funktionen (und ihre Ableitungen)

	$f(x)$	$f'(x)$
$x>0, a\in\mathbb{R}$	x^a	$a\,x^{a-1}$
$a>0$	a^x	$a^x\cdot\ln a$
$x>0,\ a>0$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$

$[x^2]' = 2\cdot x$

$[x^1]' = 1\cdot x^0 = 1$

$[1]' = [x^0]' = 0\cdot x^{-1} = 0$

$\left[\frac{1}{x}\right]' = [x^{-1}]' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$[\sqrt{x}]' = [x^{1/2}]' = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left[\sqrt[5]{x^3}\right]' = \left[x^{3/5}\right]' = \frac{3}{5}\cdot x^{-2/5} = 0.6\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

Rechenregeln

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$ Summenregel

$$[a\cdot f(x)]' = a\cdot f'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$ Produktregel

NAZ − ZAN

$$\left[\frac{z(x)}{n(x)}\right]' = \frac{n(x)\cdot z'(x) - z(x)\cdot n'(x)}{n^2(x)}$$ Quotienten-regel

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$ Kettenregel

↳ Nachdifferenzieren

Beispiele:

- $\left[2x^2 - 4/x^3\right]' = \left[2\cdot x^2 + (-4\cdot x^{-3})\right]' = 2\cdot 2x - 4\cdot(-3)\cdot x^{-4}$ (Summenregel)

  $= 4x + 12/x^4$

- $[x^2\cdot \ln x]' = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x\cdot(2\ln(x) + 1)$

  $f\cdot g$ $\quad f'\cdot g + f\cdot g'$

- A48 f) $g_6(x) = \dfrac{x^2 + x^3}{e^{-x}}$

  $\Rightarrow g_6'(x) = \dfrac{e^{-x}\cdot(2x+3x^2) - (x^2+x^3)\cdot e^{-x}\cdot(-1)}{(e^{-x})^2}$

  $= \dfrac{2x + 3x^2 + x^2 + x^3}{e^{-x}} = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 2x}{e^{-x}}$

  $= e^x\cdot x\cdot(x^2 + 4x + 2)$

schneller: $g_6(x) = e^x\cdot(x^2+x^3) \Rightarrow g_6' = e^x\cdot(x^2+x^3) + e^x\cdot(2x+3x^2)$

$= e^x\cdot(x^3 + 4x^2 + 2x)$

Beispiel (A50 f)

gesucht: Abl. von $f(x) = x^x$

Tipp: $\ln(f(x)) = \ln(x^x)$ $\longrightarrow$ $x \cdot \ln x$

(ableiten) $\Rightarrow \quad \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

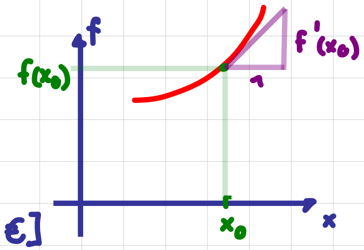
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot f(x) = (\ln(x)+1) \cdot x^x$$

Änderungsrate und Elastizität

geg. $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f \neq 0$

Änderungsrate: kleines rho

$$\boxed{\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$



Beispiel: geg. Umsatz U in Abh. vom Werbebudget w [in Mio €]

$U(10) = 2000$
$U'(10) = 100$

$U'(10)$: Bei Erhöhung des Werbebudgets von 10 Mio um 1 Mio erhöht sich der Umsatz (marginal) um 100 Mio €.

$\rho_u(10) = \frac{U'(10)}{U(10)} = \frac{100}{2000} = 0.05$, d.h. Bei Erhöhung des Werbeb. von 10 Mio um 1 Mio erhöht sich der Umsatz um 5%

Elastizität:

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \rho_f(x) \cdot x} = \frac{f'}{f/x} = \frac{f'}{f} \cdot x$$

Beispiel: $\varepsilon_U(10) = \rho_u(10) \cdot 10 = 0.05 \cdot 10 = 0.5$

Bei Erh. des Werbeb. von 10 Mio um 1% erhöht sich der Umsatz (marginal) um 0.5%

$|\varepsilon_f(x)| > 1 \Leftrightarrow$ f ist elastisch bei x

$|\varepsilon_f(x)| < 1 \Leftrightarrow$ f ist unelastisch

Ableitungsregeln

- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (soweit definiert) von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar.
- Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

- Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Daraus ergibt sich für eine Konstante c: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- Quotientenregel:

$$\left(\frac{z}{n}\right)'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
x^b	bx^{b-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Ableitungen höherer Ordnung

- Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$
- Wenn der Differentialquotient $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar ist, dann heißt

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = f''(x)$$

  zweite Ableitung oder Differentialquotient zweiter Ordnung von f in $x \in D$.
- Analog für $n = 2,3,\ldots$:

$$\frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)} f(x)}{(dx)^{(n-1)}}\right) = f^{(n)}(x)$$

  $f^{(n)}(x)$ bezeichnet dabei die n-te Ableitung von f in $x \in D$.
- f heißt n-mal stetig differenzierbar in D, wenn f in D stetig und in jedem Punkt $x \in D$ n-mal differenzierbar ist

Definition Elastizität

- Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- Dann heißt

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Änderungsrate von f

- und

$$\epsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \rho_f(x) \cdot x$$

Elastizität von f.

Beispiel (Opitz u. a., 2017, Beispiel 11.28, S.148)

- Für f mit $f(x) = 10^{-9} e^{4x}$ ergibt sich

$$\epsilon_f(x) = 4x$$

- Damit bei $x = 6$: $\epsilon_f(6) = 24$

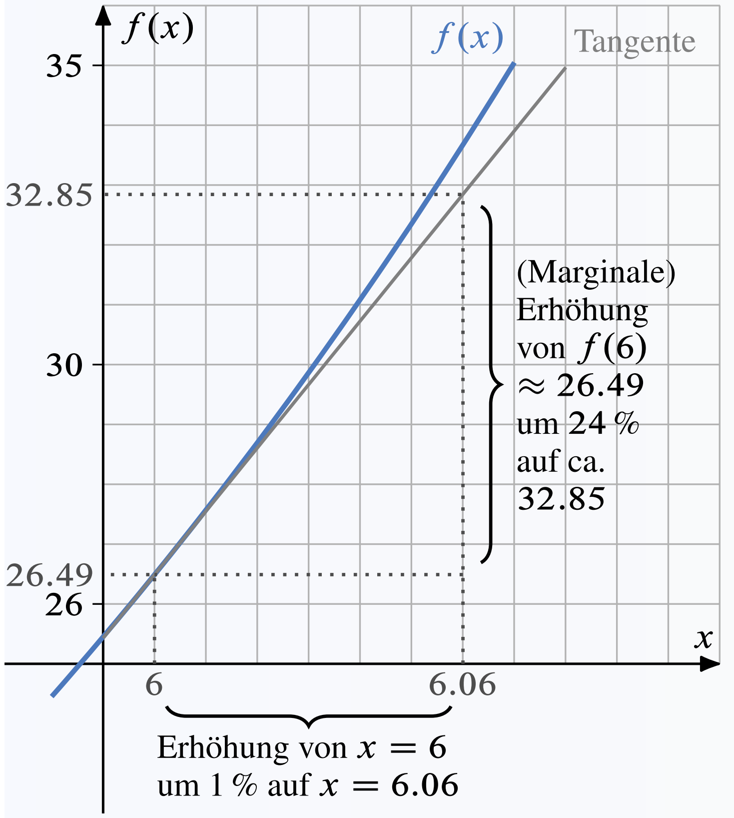


Abbildung 11.8: *Elastizität von f bei $x = 6$*

Opitz u. a., (2017, S. 148)

Definition

- Für $|\epsilon_f(x)| > 1$ reagiert die relative Änderung von $f(x)$ überproportional auf relative Änderungen von x, die Funktion f heißt im Punkt x elastisch.
- Für $|\epsilon_f(x)| < 1$ bezeichnen wir die Funktion f im Punkt x als unelastisch.

Beispiel

- $f(x) = ae^{bx}$ mit $a, b \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{abe^{bx}}{ae^{bx}} = b \quad \text{und} \quad \epsilon_f(x) = x \cdot \rho_f(x) = bx$$

- Die Änderungsrate der Exponentialfunktion ist also konstant
- Die Elastizität wächst linear mit x.

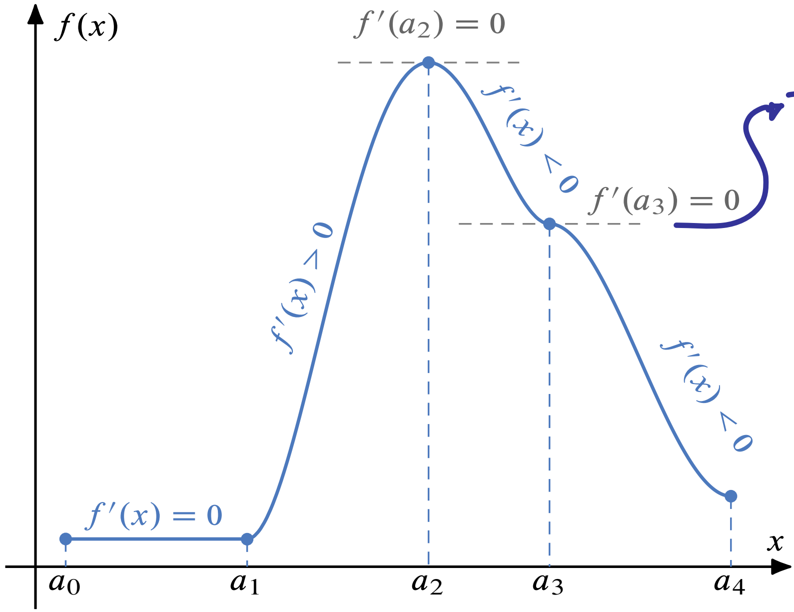
Steigung und erste Ableitung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und differenzierbar auf (a, b).

Dann gilt:

- f monoton wachsend in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f monoton fallend in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konstant in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend in $[a, b]$
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton fallend in $[a, b]$



Terrasse

Abbildung 12.3: *Monotonie einer differenzierbaren Funktion*

Opitz u. a., (2017, S. 153)

Krümmung und zweite Ableitung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und zweimal differenzierbar auf (a, b).

Dann gilt:

- f konvex in $[a, b] \Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konkav in $[a, b] \Leftrightarrow f''(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f beschreibt eine Gerade in $[a, b] \Leftrightarrow f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng konvex in $[a, b]$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng konkav in $[a, b]$

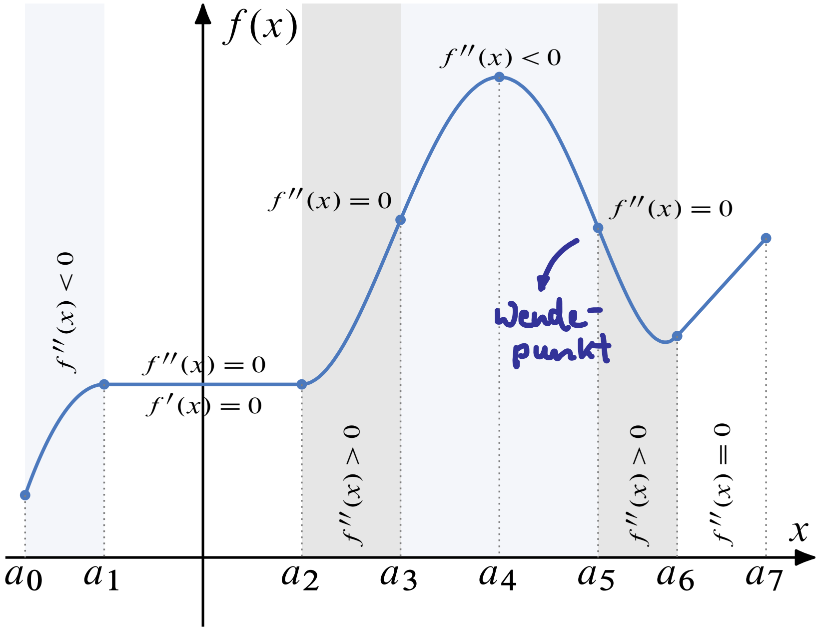


Abbildung 12.5: *Konvexität und Konkavität einer differenzierbaren Funktion*

Opitz u. a., (2017, S. 154)

Beispiel

f' $+ + + + + \; 0 \; - - - -$ (1)

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^{-x}$
- $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$
- Damit: $f'(x) \geqslant 0$ für $x \leqslant 1$ und $f'(x) \leqslant 0$ für $x \geqslant 1$
- $\Rightarrow$ f mon. wachsend für $x \leqslant 1$ und f mon. fallend für $x \geqslant 1$
- $\Rightarrow$ f global maximal bei $x = 1$

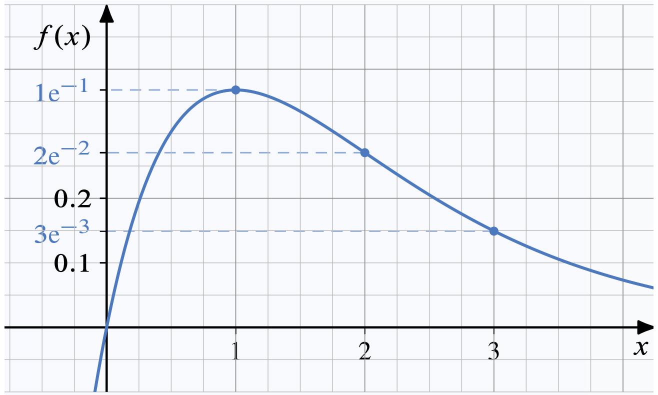


Abbildung 12.10: *Graph der Funktion f mit $f(x) = xe^{-x}$*

Opitz u. a., (2017, S. 156)

- $$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

Wendepunkt

f'' $- - - - \; 0 \; + + +$ (2)

- $\Rightarrow$ $f''(x) \geqslant 0$ für $x \geqslant 2$ und $f''(x) \leqslant 0$ für $x \leqslant 2$
- $\Rightarrow$ f konvex für $x \geqslant 2$ und f konkav für $x \leqslant 2$

Definition Wendepunkt

- $f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt
- wenn es ein $r > 0$ gibt mit
- f ist in $[x_0 - r, x_0]$ streng konvex und
- f ist in $[x_0, x_0 + r]$ streng konkav und
- (oder umgekehrt)

Definition Terrassenpunkt

- x_0 ist Terrassenpunkt
- wenn x_0 Wendepunkt ist
- und $f'(x) = 0$

Extremumsbedingung

Voraussetzung

- f zweimal stetig differenzierbar in (a, b)
- und $f'(x_0) = 0$ mit ($x_0 \in (a, b)$)

Dann gilt

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Maximum von f
- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Minimum von f

- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Maximum von f
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Minimum von f

Lokales versus globales Maximum

Der Finanzminister endlich mal wieder oben auf

(Zeichnung: Haitzinger, 2009)