Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Finanzmathematik

Zins ≙ Gebühr für überlassenes Geld,
abhängig von Summe, der Dauer
und vom vereinbarten Zinssatz

K_0 : Betrag zu Beginn
K_n : Betrag nach n Zinsperioden
i : Zinssatz (z.B. $5\% = 0.05$
$1.2\% = 0.012$
$-3\% = -0.03$)

q : Zinsfaktor ($= i+1$, z.B. $5\% \mathrel{\hat{=}} 1.05$
$1.2\% \mathrel{\hat{=}} 1.012$
$-3\% \mathrel{\hat{=}} 0.97$)

Einfache (lineare) Verzinsung

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

n: Anzahl Zinsperioden

Beispiel: Verzugszinssatz $i = 0.03$ (p.a.) → per annum ≙ pro Jahr
$K_0 = 1$ Mio €, $n = 3$ (Jahre)

$$K_n = 1\,\text{Mio} \cdot (1 + 3 \cdot 0.03) = 1\,090\,000$$

$$[= \underbrace{1\,\text{Mio} \cdot 1}_{K_0} + \underbrace{1\,\text{Mio} \cdot 3 \cdot 0.03}_{\text{Zinsen}} = 1\,\text{Mio} + 90\,000\,€]$$

Exponentielle Verzinsung (Zinseszinsen)

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

Beispiel: Kontostand Girokonto: $K_0 = -1000$ €
$i = 0.14$ (Annahme: Jährliche Abrechnung)
$n = 10$

$$K_n = -1000 \cdot 1.14^{10} \approx -3707.23\,€$$

Jetzt: $K_n = -1$ Mio €, gesucht: Laufzeit n

$$K_n = K_0 \cdot q^n \iff \frac{K_n}{K_0} = q^n \iff n = \log_q\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n = \log_{1.14}\left(\frac{-1\,\text{Mio}}{-1000}\right) \approx 52.7 \text{ Jahre}$$

Gemischte Verzinsung (30-360-Tage-Methode)

Regeln:
- Jeder Monat hat 30 Tage
- Der Einzahlungstag wird komplett verzinst, der Auszahlungstag gar nicht

Beispiel: Einzahlung von 100 000 € am 1.4.2017 auf Konto (0.01 p.a.), abheben am 6.12.2017

gesucht: Endbetrag inkl. Zinsen

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t}{360}\right)$$

Δt: Zinstage

$$= 100\,000 \cdot \left(1 + 0.01 \cdot \frac{\overset{\text{April}}{30} + 7 \cdot 30 + \overset{\text{Dezember}}{5}}{360}\right) = 100\,680.55\,€$$

Beispiel: Einzahlung 1 Mrd € am 28.2.2017 (23:59)
abheben am 1.3.2017 (0:01 Uhr)
(zu 1% p.a.)

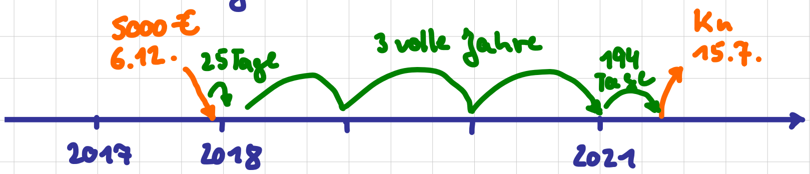
Anzahl Zinstage?
A:0, B:1, C:2, D:3, E:4

http://pingo.upb.de/252598

1	1%	A
28	25%	B
7	6%	C
73	65%	D
3	3%	E

$$K_n = 1\,\text{Mrd} \cdot \left(1 + 0.01 \cdot \frac{3}{360}\right) = 1\,000\,083\,333{,}33\,€$$

Beispiel: Einzahlung : Am 6.12.2017, 5000 € ($i=0.01$)
Auszahlung: Am 15.7.2021



$$k_n = \underbrace{\underbrace{5000 \cdot \left(1 + 0.01 \cdot \frac{25}{360}\right)}_{\text{Kontostand 1.1.2018}} \cdot 1.01^3}_{\text{Kontost. 1.1.2021}} \cdot \left(1 + 0.01 \cdot \frac{194}{360}\right)$$

≈ 5182.86

allgemein:

$$k_n = k_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_E}{360}\right) \cdot q^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_A}{360}\right)$$

gemischte Verz. bei Überschreiten der Jahresgrenze

Δt_E : Zinstage im Einzahlungsjahr
Δt_A : Zinstage im Ausz. j.
n : Ganze Jahre dazwischen

Unterjährige Verzinsung

Beispiel: Girokonto, Überziehungszins $i = 0.19$ p.a. (nominal)
quartalsweise Zinsabrechnung

Kontostand am 1.1.2017 : -10000 €

1. Zinsabrechnung (1.4.2017) : $-10000 \cdot \left(1 + \frac{0.19}{4}\right)$
2. Z. a. (1.7.2017) : $-10000 \cdot \left(1 + \frac{0.19}{4}\right)^2$

:

4. Z.a. (1.1.2018) : $-10\,000 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{0.19}{4}\right)^4}_{q_{eff}} \approx -12039.72$ €

q_{eff} (Effektivzins(faktor))

allgemein:

$$q_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m$$

i_{nom} : Nominaler Jahreszins
m : Anzahl Zinsabrechnungen pro Jahr
q_{eff} : Effektivzinsfaktor

		m	K.n.m.
1	pro Quartal	1	-11900.00000
2		2	-11990.25000
3		4	-12039.71278
4		12	-12074.50998
5	Woche	52	-12088.30941
6		365	-12091.89820
7		8760	-12092.47106
8		31536000	-12092.49594
	pro Sekunde	∞	$-10000 \cdot e^{0.19}$
			12092.49598

Satz:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \xrightarrow[m \to \infty]{} e^i$$

} stetige Verzinsung

$$q_{eff} = e^i$$

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Beispiel: 2 Konten, Ein- bzw. Auszahlungen
Zinssatz $i = 0.08$

Zeitpunkt [Jahr]	0	1	2	5	10
Konto A [T€]	100	0	0	0	0
Konto B [T€]	0	20	25	35	45

Idee: Vergleich der Kontostände zum Zeitpunkt $t = 10$

$$k_n^A = 100T \cdot 1.08^{10} = 215892.49$$

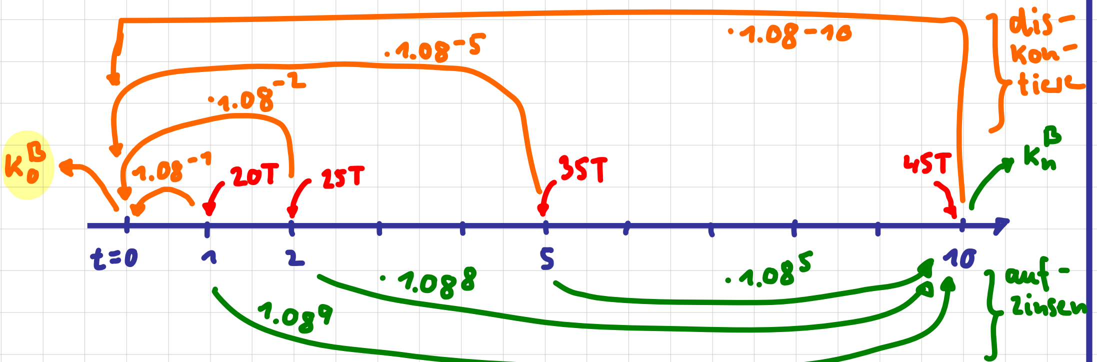
$$k_n^B = 20T \cdot 1.08^9 + 25T \cdot 1.08^8 + 35T \cdot 1.08^5 + 45T$$
$$= 182679.83$$

Welche einmalige Zahlung zum Zeitpunkt $t=0$ ersetzt k_n^B?

Barwert — diskontieren, abzinsen

$$k_n^B = k_0^B \cdot q^n \iff k_0^B = k_n^B \cdot q^{-n}$$

$$k_0^B = (20T \cdot 1.08^9 + 25T \cdot 1.08^8 + 35T \cdot 1.08^5 + 45T) \cdot 1.08^{-10}$$
$$= 20T \cdot 1.08^{-1} + 25T \cdot 1.08^{-2} + 35T \cdot 1.08^{-5} + 45T \cdot 1.08^{-10}$$



allgemein: $$k_0 = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

k_0: Kapitalwert
A_t: Zahlung zum Zeitpunkt t
q: (Kalkulations)zinsfaktor
$A_t \cdot q^{-t}$: diskontierte Zahlung, Barwert

Bemerkungen:
- zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t) sind finanzmathematisch äquivalent

$$(A_t) \sim (B_t)$$

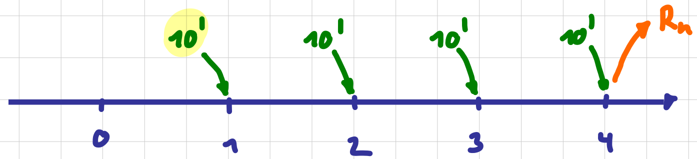
wenn ihre Kapitalwerte gleich sind

- $k_0^A > k_0^B \Rightarrow$ Projekt A ist vorzuziehen
- $k_0^A > 0 \Rightarrow$ Projekt A ist rentabel
- Kalkulationszinssatz beinhaltet bei Projektbewertungen meistens einen Risikoaufschlag

Renten ≙ Regelmäßige Zahlungen in konstanter Höhe

Beispiel: 4 Jahre jeweils zum Ende Einzahlung von 10000 € auf Konto ($i = 0.05$)

gesucht: Kontostand nach 4 Jahren



$$R_n = 10' \cdot 1.05^3 + 10' \cdot 1.05^2 + 10' \cdot 1.05^1 + 10' = 43101.25 €$$
$$= 10000 \cdot (\underbrace{1.05^3 + 1.05^2 + 1.05^1 + 1.05^0}_{\text{geometrische Reihe}})$$
$$= 10000 \cdot \frac{1.05^4 - 1}{1.05 - 1}$$

allgemein : n nachschüssige Zahlungen in Höhe r mit Zins(faktor) q

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$ nachschüssiger Rentenendwert

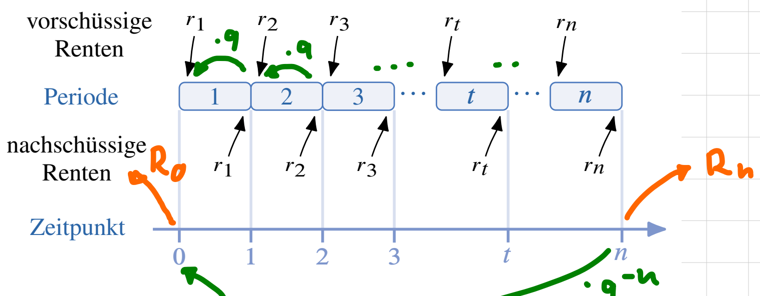


Abbildung 27.1: *Vorschüssige und nachschüssige Rentenzahlungen im Planungszeitraum* $1, \ldots, n$

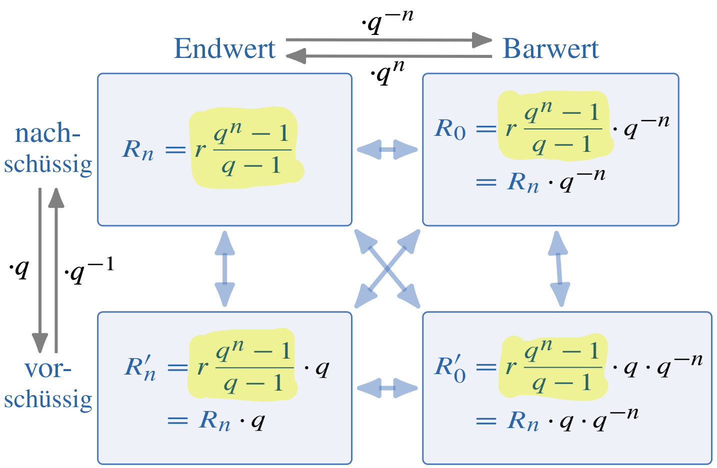
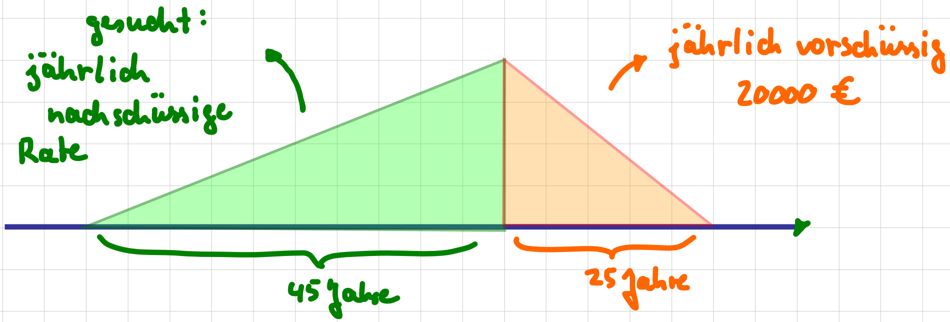


Abbildung 27.2: *Gegenüberstellung vorschüssiger und nachschüssiger Rentenbar- bzw. -endwerte*

Beispiel: Ansparphase : 45 Jahre, Entnahme : 25 Jahre } Zinssatz 5%



Idee : Rentenendwert Ansparphase = Rentenbarwert Entnahmephase

$$R_n^A = R_0^E$$

$$r \cdot \frac{1.05^{45} - 1}{\cancel{1.05 - 1}} = 20\,000 \cdot \frac{1.05^{25} - 1}{\cancel{1.05 - 1}} \cdot 1.05 \cdot 1.05^{-25}$$

$\Rightarrow$ $r \approx 1853.30$ €

Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differentialrechnung
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Opitz u.a., (2017, Kapitel 27)

8. Finanzmathematik
   - Zinsen
   - Renten
   - Tilgung
   - Kursrechnung

- Zinsen: Gebühr, die ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlt
- Betrag der Zinsen (Z): Abhängig von Höhe des überlassenen Kapitals K, dem vereinbartem Zinssatz und der Dauer der Überlassung

Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
K_0	Betrag zu Beginn
K_t	Betrag zum Zeitpunkt t
K_n	Endbetrag (Zeitpunkt n)
n	ganzzahlige Laufzeit
Z_t	Zinsen zum Zeitpunkt t
$i = \frac{p}{100}$	(konstanter) Zinssatz
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
p	(Prozentzinssatz)

- Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \end{aligned}$$

- Gesetzlich vorgeschrieben für Verzugszinsen und bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen
(BGB, §248)
- K_0 unbekannt: Barwert K_0 über Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung
- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Unterjährige einfache Verzinsung: Sparbuchmethode

- Sparbuchmethode: Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen,
- Maximal: 360 Zinstage pro Jahr
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Dazu: Berechnung des Bruchteils eines Zinsjahres über die Anzahl der Zinstage $t \in \{0, 1, \ldots, 360\}$
- Regeln: Einzahlungstag wird komplett verzinst, Auszahlungstag gar nicht
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1 + i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1 + i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

- Damit: Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$K_0 = K_n q^{-n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- q^{-n} heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Anzahl Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),

  gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung unter Verwendung der Sparbuchmethode zur Bestimmung der Anzahl der Zinstage

Gemischte Verzinsung: Beispiel

Beispiel

Am 15.9.2016 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (letzter Zinstag 20.9.2023)?

Lösung:

$$15.9. \;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 15 = 255$$

$$\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255 - 1) = 106$$

$$20.9. \;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 20 = 260$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = 260$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$

$$= 15\,541{,}20$$

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.16 bis 14.9.23; dazu 6 Tage)

- Würde man die Zinseszinsformel mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.16 bis zur Auflösung am 21.10.23), so ergäbe sich …

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right)$$
$$= 15\,540{,}31$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

- Abrechnung und Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Abständen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Bei m Zinsabschnitten pro Jahr heißt gegeben, so heißt:

- der Zins i oder i_{nom} der nominelle Jahreszins oder Jahreszins,
- $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins,
- i_{kon} der zu i konforme Periodenzins, mit dem die periodische Verzinsung über i_{rel} zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i_{\text{kon}})^m = (1 + i)$$

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie periodische Verzinsung mit i_{rel}. (Entsprechendes gilt für q_{rel}, $q$kon, q_{eff}).

$$K_1 = K_0 \cdot q_{\text{rel}}^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}}$$
$$\Rightarrow q_{\text{eff}} = q_{\text{rel}}^m$$

$$\text{mit } q_{\text{rel}} = 1 + i_{\text{rel}} = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{rel}})^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_{\text{rel}})^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- Anmerkung: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15.9.2016 (15.10.2016) wurden 12 000 € zu effektiv 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (21.10.2023)?

Lösung

- Verwendung des konformen Zinses auf täglicher Basis,
- also $q_{\text{kon}} = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^{6} \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^{6} \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right)\right]^{n} = K_0 \left(e^{i}\right)^{n}$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^{i} - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

Beispiel (überzogenes Girokonto)

$K_0 = 10\,000\,€$, $n = 5$, nominaler Jahreszins $i = 0{,}19$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}19 \cdot 5} = 25\,857{,}10\,€$$

$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}19} - 1 = 20{,}925\,\%$$

Anmerkungen

- Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	19,903	20,397	20,745	20,925

- Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Beginn des 2. Zinszeitraums (1.1. des 2. Jahres).
  - $t = 2$ Beginn des 3. Zinszeitraums (1.1. des 3. Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzten Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000,\ t_A = 2,\ p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43 \text{ €}$$

Eine Zahlung von € 12 250,43 nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € 10 000 nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

Zahlungsströme, Barwert, Endwert

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \ldots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$\begin{aligned} (A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\ \Leftrightarrow \quad q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\ \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0 \end{aligned}$$

$$(A_t) \sim (B_t) \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t)\, q^{-t} = 0$$

Beispiel

Kalkulationszinssatz gleich 5 %. Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1000	0	1000	0	1000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} A_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 0 \cdot 1{,}05^{0} + 1000 \cdot 1{,}05^{-1} + 0 \cdot 1{,}05^{-2} + 1000 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 0 \cdot 1{,}05^{-4} + 1000 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2599{,}74\end{aligned}$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} B_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 400 \cdot 1{,}05^{0} + 400 \cdot 1{,}05^{-1} + 400 \cdot 1{,}05^{-2} + 600 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 600 \cdot 1{,}05^{-4} + 600 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2625{,}80\end{aligned}$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \ldots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
q	Zinsfaktor
R_0	Barwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\ &= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\ &= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\ &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \mathrm{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \mathrm{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:

Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} R_{10} &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} \\ &= 12\,000 \cdot 12{,}006107 \\ &= 144\,073{,}28 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Beispiel Rentenbarwert

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}} \\
&\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896 \\
&\approx 97\,330{,}75 \quad [\text{€}]
\end{aligned}
$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q .
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\
&= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\
&= 83\,876{,}01 \quad [\text{€}]
\end{aligned}
$$

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$r = 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1}$$

$$= 10\,380 \cdot 0{,}096342$$

$$= 1\,000{,}03 \quad [€\,]$$

Vorschüssige konstante Renten

- Rentenbetrag wird jeweils zu Beginn der Zinsperiode in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \cdots = r'_n = r'$ bezahlt.
- äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n \quad = \quad r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \mathrm{VREF}_{p,n}$$

- VREF: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor

- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\ &= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \quad = \quad r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \mathrm{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- VRBF: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.