

Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 7. Juli 2015 – Prüfer: Etschberger, Heiden, Jansen

Studiengang: IM und BW

Punkte: 12, 15, 12, 17, 17, 17 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1

12 Punkte

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Gauß und Jordan für $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ die Menge L aller Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & - & 3x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 3 \end{array}$$

Lösungshinweis:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Operation
①	1	2	-1	0	-3	1	
②	0	1	0	1	-3	0	
③	0	-1	1	-1	2	1	
④	1	0	-1	-2	3	1	① - 2 · ②
⑤	0	1	0	1	-3	0	②
⑥	0	0	1	0	-1	1	③ + ②
⑦	1	0	0	-2	2	2	④ + ⑥
⑧	0	1	0	1	-3	0	⑤
⑨	0	0	1	0	-1	1	⑥

$x_1 - 2x_4 + 2x_5 = 2$

$$\Rightarrow L = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

alternativ: $L = \{ x_1, \dots, x_5 : \begin{array}{l} x_1 = 2a - 2b + 2 \\ x_2 = -a + 3b \\ x_3 = \quad \quad b + 1 \\ x_4 = a \\ x_5 = \quad \quad b \end{array} \} \text{ beliebig } \}$

Aufgabe 2

15 Punkte

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ der Folgen

$$\begin{aligned} \frac{(4n^2 - 4n + 1)(1-n)}{2n^3 + 2n} &= a_n = \frac{(2n-1)^2(1-n)}{2n(n^2+1)}, & b_n &= \frac{(n+1)!}{n!(2n-1)}, & c_n &= \frac{1-3^{-n}}{1-2^{-n}} = \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-(\frac{1}{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= \frac{-4n^3 + 4n^2 - n + 4n^2 - 4n + 1}{2n^3 + 2n} & &= \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Gegeben ist für Teilaufgabe b) und c) die Reihe (r_n) mit

$$r_n = \sum_{j=0}^n \frac{a^j}{3^{j+1}} = \sum_{j=0}^n \frac{a^j}{3 \cdot 3^j} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^n \left(\frac{a}{3}\right)^j$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert (r_n) ?

$$r_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \left| \frac{a}{3} \right| < 1$$

c) Berechnen Sie für $a = 1$ den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$.

Lösungshinweis:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

b) Die Reihe konvergiert für alle $-3 < a < 3$.

c) Mit $a = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |q| < 1 \quad \sum_{i=0}^n q^i &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} \\ \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^j &\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

$$(r_n) = \sum_{j=0}^n \frac{1^j}{3^{j+1}} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^j \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3

12 Punkte

Gärtner Blümel will seinen 100 m^2 großen Garten mit Kartoffeln und Bohnen bepflanzen. Folgende Daten stehen zur Verfügung:

	Kartoffeln	Bohnen
Arbeits- und Materialkosten [€/m ²]	12	2
Reingewinn [€/m ²]	20	10

Herr Blümel möchte

- ▶ seinen Reingewinn maximieren (Zielfunktion),
- ▶ kann maximal 900 € investieren (Nebenbedingung 1) und außerdem
- ▶ nicht mehr als 60% der 100 m^2 Anbaufläche für Bohnen beanspruchen (Nebenbedingung 2).
- ▶ Die gesamte Anbaufläche ist 100 m^2 . (Nebenbedingung 3).

- a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Zielfunktion und Nebenbedingungen. Bezeichnen Sie dabei die Anbaufläche für Kartoffeln mit x_1 , die für Bohnen mit x_2 .
- b) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich. Markieren Sie die theoretisch möglichen Optimallösungen.
- c) Wieviel m^2 soll Herr Blümel mit Kartoffeln und wieviel mit Bohnen bepflanzen, damit sein Reingewinn möglichst groß wird?
(Hinweis: Berechnung der relevanten Schnittpunkte ist erforderlich, Durchführung des Simplex ist nicht verlangt)

Lösungshinweis:

a)

Zielfunktion	$20x_1 + 10x_2$	\rightarrow	max
NB 1	$12x_1 + 2x_2$	\leq	900
NB 2	x_2	\leq	60
NB 3	$x_1 + x_2$	\leq	100

b) Siehe Skizze:

c) $A = (40, 60)$,

$B = (70, 30)$,

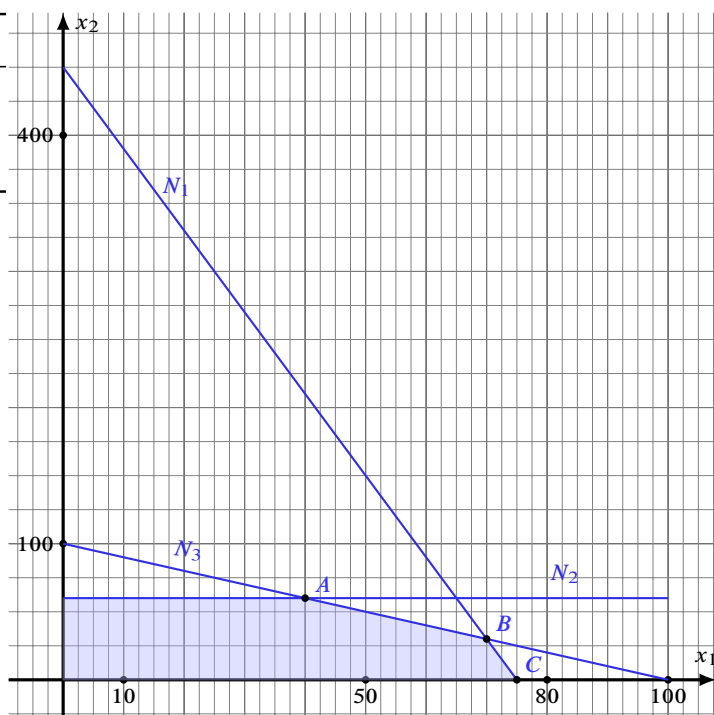
$C = (75, 0)$. Damit

$$\text{ZF}(A) = 20 \cdot 40 + 10 \cdot 60 = 1400,$$

$$\text{ZF}(B) = 20 \cdot 70 + 10 \cdot 30 = 1700$$

$$\text{ZF}(C) = 20 \cdot 75 + 10 \cdot 0 = 1500$$

also ist B optimal.



Anton Arglos hat von seiner Großmutter 30 000 € geschenkt bekommen, um sein Studium zu finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Anton sein Studium ausschließlich aus dem Geldgeschenk finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 7 % ausgegangen werden kann. Stellen Sie Ihren Rechenweg jeweils ausführlich und nachvollziehbar dar!

- a) Wie lang darf Antons Studium dauern, wenn er jährlich nachschüssig 7000 € entnimmt?
- b) Anton fällt auf, dass er das Geld eigentlich jährlich vorschüssig benötigt, aber mit 5000 € jährlich auskommt. Wie lang kann sein Studium unter diesen Annahmen dauern?

Am Ende seines Studiums bemerkt der geschäftstüchtige Anton, dass er nun insgesamt ein Vermögen von 50 000 € besitzt. Anton bekommt ein Angebot seiner Hausbank, das Geld als Festgeld zum jährlichen Zinssatz von i_{Haus} anzulegen. Anton freut sich, da er nun weiß, dass er in 12 Jahren ein Endvermögen von 100 000 € besitzen wird.

- c) Wie hoch ist der Zinssatz i_{Haus} , den Anton von seiner Hausbank angeboten bekommt?
- d) Die Onlinebank Fastmoney bietet ihm eine Anlage zu einem monatlichen Zins (mit monatlicher Zinsausschüttung) von 0,5 % an. Soll er das Angebot von Fastmoney gegenüber dem Angebot seiner Hausbank bevorzugen? Nehmen Sie (unabhängig von Ihrer Lösung unter Aufgabe c) an, dass die Hausbank Anton einen jährlichen Zins von 6 % anbietet) Begründen Sie Ihre Empfehlung rechnerisch!

Anton entschließt sich, anstatt das Geld anzulegen ein Haus zu kaufen. Hierfür nimmt er zusätzlich einen Kredit von 200 000 € zu einem konstanten Zins von 8 % auf. Der Kredit ist mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen.

- e) Wieviel Zinsen muss Anton im 15. Jahr bezahlen?

Lösungshinweis:

$$a) R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{r}{r - i \cdot R_0}\right)}{\ln q} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{7000}{7000 - 0,07 \cdot 30000}\right)}{\ln 1,07} = 5,2716.$$

Das Geld reicht 5 Jahre.

$$b) R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} q^{-n} \Leftrightarrow 30000 = 5000 \cdot 1,07 \cdot \frac{1 - 1,07^{-n}}{0,07}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 \cdot 0,07}{1,07} = 1,07^n - 1 \Leftrightarrow n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{6 \cdot 0,07}{1,07}\right)}{\ln 1,07} \approx 7,3670045.$$

das Geld reicht also in diesem Fall 7 Jahre.

$$c) K_n = K_0(1 + i_{\text{Haus}})^n \Leftrightarrow i_{\text{Haus}} = \sqrt[12]{\frac{100000}{50000}} - 1 = \sqrt[12]{2} - 1 = 0,0594631 \approx 5,95 \%$$

d) Alternative 1: Über effektiven Jahreszins:

$$q_{\text{eff, Onlinebank}} = (1 + 0,005)^{12} \approx 1,0617 > 1,06 = q_{\text{eff, Hausbank}}.$$

Alternative 2: Über Endbetrag:

$$K_{n, \text{Onlinebank}} = 50\,000 \cdot (1 + 0,005)^{12 \cdot 12} = 102\,537,54$$

$$K_{n, \text{Hausbank}} = 50\,000 \cdot (1 + 0,06)^{12} = 100\,609,82$$

In jedem Fall: Anton sollte das Angebot der Fastmoney-Bank bevorzugen.

- e) Restschuld zu Beginn des 15. Jahres: $200\,000 - 14 \cdot 10\,000 = 60\,000$. Damit ist der Zins im 15. Jahr: $60\,000 \cdot 0,08 = 4800$.

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 1 - e^{-x^2+2x}$$

$$1 - e^{-1+2} = 1 - e$$

- Bestimmen Sie alle Nullstellen von f .
- Bestimmen Sie die Extremstelle der Funktion, und geben Sie an, um welche Art von Extremum es sich handelt.
- Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Gibt es eine Parabel, die durch alle Nullstellen und den Extrempunkt der Funktion f geht? Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ggf. die funktionale Form $p(x)$ der Parabel an.

Lösungshinweis:

- a) Es gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn der Exponent der e-Funktion null ist, also

$$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

- b) Setze $f'(x) = 0$, dann ergibt sich mit der Ableitung $f'(x) = -(-2x + 2) \cdot e^{-x^2+2x}$, dass $x = 1$. Es handelt sich um ein Minimum, da die Ableitung an der Stelle $x = 1$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat. Alternativ kann man die zweite Ableitung bestimmen (was allerdings komplizierter ist): $f''(x) = (-4x^2 + 8x + 2) \cdot e^{-x^2+2x}$ und damit $f''(1) > 0$.
- c) Beide Grenzwerte sind offenbar gleich, da der Exponent der e-Funktion in beiden Fällen gegen $-\infty$ geht. Damit ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.
- d) Ja, es gibt so eine Parabel. Das Extremum liegt genau zwischen den beiden Nullstellen der Funktion. Damit ist die Parabel von der Form $p(x) = A(x - 1)(x - 2)$. Der Faktor A kann über die Bedingung $f(\frac{1}{2}) = p(\frac{1}{2})$ bestimmt werden. Es ergibt sich nach Einsetzen der Stelle $x = \frac{1}{2} = 0.5$:

$$1 - e^{-1+2} = A \cdot 1 \cdot (-1) \Rightarrow A = e - 1 \Rightarrow A \approx 1,7182818$$

Damit ist $p(x) = (e - 1) \cdot x(x - 2)$.

$$f(1) = 1 - e$$

$$p(x) = A \cdot (x^2 - 2x)$$

$$p(1) = 1 - e = A(1 - 2) = -A$$

$$\Leftrightarrow A = e - 1 \approx 1,718$$

$$e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \rightarrow 0$$

Gegeben sei folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(s, t) = (s^2 + t^2) \cdot e^{-t}.$$

- a) Berechnen Sie den Funktionswert $f(2, 3)$. $\hookrightarrow f_t = 2 \cdot t \cdot e^{-t} + (s^2 + t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1)$
 $= e^{-t} \cdot (2t - s^2 - t^2)$
- b) Berechnen Sie den Gradienten ∇f .
- c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen, also die Nullstellen von ∇f .
(es muss keine Hessematrix von f berechnet werden)

Im Folgenden werde die Funktion

$$g(a, b) = a^3 + a^2 \cdot b - b^2 - 4 \cdot b$$

betrachtet. Zu g wurden bereits die kritischen Stellen $(0, -2)$, $(1, -\frac{3}{2})$ sowie $(-4, 6)$ und die folgende Hessematrix H_g berechnet:

$$H_g = \begin{pmatrix} 6a + 2b & 2a \\ 2a & -2 \end{pmatrix}$$

- d) Untersuchen Sie die Funktion $g(a, b)$ in den angegebenen kritischen Stellen auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Lösungshinweis:

a) $f(2, 3) = (2^2 + 3^2) \cdot e^{-3} \approx 0.64723$.

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2s \cdot e^{-t} \\ e^{-t}(2t - s^2 - t^2) \end{pmatrix}$

c) $\nabla f(s, t) = 0 \iff 2s \cdot e^{-t} = 0 \text{ und } e^{-t}(2t - s^2 - t^2) = 0$

Die erste Gleichung ist genau dann 0, wenn $s = 0$ und damit ist die zweite Gl. genau dann 0, wenn $2t - t^2 = 0$. Also: $(0, 0)$ und $(0, 2)$ sind die (einzigen) kritischen Stellen von f .

- d) Für den kritischen Punkt $(0, -2)$ gilt: $H_g(0, -2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Damit ist $H_1 = -4 < 0$ sowie $\det(H_2) = 8 > 0$. Also: $H_g(0, -2)$ negativ definit und g besitzt ein lokales Maximum bei $(0, -2)$.

Für den kritischen Punkt $(1, -\frac{3}{2})$ gilt: $H_g = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Damit: $\det(H_2) = -6 - 4 = -10 < 0$. Also: $H_g(1, -3/2)$ ist indefinit und g hat Sattelpunkt bei $(1, -3/2)$.

Für den kritischen Punkt $(-4, 6)$ gilt: $H_g = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$. Damit: $\det(H_2) = 24 - 64 = -40 < 0$. Also: $H_g(-4, 6)$ ist indefinit und g hat einen Sattelpunkt bei $(-4, 6)$.