

Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 11. Juli 2017 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Jansen

Studiengang: IM und BW

Punkte: 14, 20, 11, 14, 11, 20 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1

14 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden aus den Aussagen A, B zusammengesetzten Aussagen. Tragen Sie dazu in der folgenden Wahrheitstabelle in die Kästchen () jeweils *w* (wahr) beziehungsweise *f* (falsch) ein.

A	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>f</i>	<i>f</i>
B	<i>w</i>	<i>f</i>	<i>w</i>	<i>f</i>
$A \Leftrightarrow B$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$A \vee B$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

- b) Bei einer Stadtratssitzung der Stadt Auxburg wird über den Bau eines Trimm-dich-Pfades am Königsplatz entschieden. Dabei können die insgesamt 60 Stadträte (x) folgende Voten abgeben:

- ▶ $F(x)$: Stadtrat x stimmt für den Bau
- ▶ $G(x)$: Stadtrat x stimmt gegen den Bau
- ▶ $H(x)$: Stadtrat x enthält sich seiner Stimme

b.1) Interpretieren Sie inhaltlich die folgende Aussage: $\bigwedge_x F(x)$

b.2) Begründen Sie kurz, warum die Äquivalenz

$$\bigwedge_x \overline{F(x)} \Leftrightarrow \bigwedge_x G(x)$$

keine Tautologie darstellt.

b.3) Formulieren Sie mit Hilfe von $G(x)$ die Aussage

„Kein Stadtrat stimmt gegen den Bau.“

als Existenzaussage (mit dem Existenzquantor \bigvee_x).

b.4) Formulieren Sie eine zur vorherigen Teilaufgabe inhaltlich äquivalente Aussage mit Hilfe von $F(x)$ und $H(x)$ als Allaussage (mit dem Allquantor \bigwedge_x).

- c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

$$A(n) : \sum_{i=1}^n (i \cdot 2^i) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

- c.1) Überprüfen Sie dazu, dass $A(n)$ für $n = 1$ wahr ist.
 c.2) Beweisen Sie den Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$.

Lösungshinweis:

- a) Wahrheitstabelle s.o.
- b) b.1) Alle Stadträte stimmen für den Bau.
 b.2) Stimm-Enthaltungen werden auf der linken Seite der Äquivalenz berücksichtigt, nicht jedoch auf der rechten Seite.
 b.3) $\overline{\bigvee_x G(x)}$
 b.4) $\bigwedge_x (F(x) \vee H(x))$
- c) c.1) $\sum_{i=1}^1 (i \cdot 2^i) = 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 \cdot 2^2 + 2$
 c.2) $\sum_{i=1}^{n+1} (i \cdot 2^i) = \sum_{i=1}^n (i \cdot 2^i) + (n + 1)2^{n+1}$
 $\stackrel{A(n)}{=} (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n + 1)2^{n+1}$
 $= 2^{n+1}(2n) + 2$
 $= n \cdot 2^{n+2} + 2$

Aufgabe 2

20 Punkte

Um die in Schwaben inzwischen fast ausgestorbene Tierart „Auxburger Panther“ wieder anzusiedeln, wurde von den zuständigen Behörden für 2017 und die darauf folgenden 10 Jahre folgender Auswilderungsplan erarbeitet:

Zu Beginn des Jahres 2017 wurden 1000 Panther ausgesetzt, wobei in den folgenden Jahren zu Jahresbeginn jeweils 20 % weniger Tiere ausgewildert werden sollen als im Vorjahr. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass sich die Population binnen jedes Jahres jeweils um 10 % vergrößert, wobei in diesem Wachstumsfaktor sowohl geborene als auch verstorbene Tiere berücksichtigt sind.

Im Folgenden steht

- ▶ $n = 0$ für das Jahr 2017, $n = 1$ für 2018 usw.,
- ▶ die Folge (p_n) für die im Jahr n ausgesetzten Panther,
- ▶ die Reihe (s_n) für die Gesamtpopulation der Panther an Ende des Jahres n

(Hinweis: Rechnen Sie im Folgenden auch mit nichtganzzahligen Ergebnissen)

- Ergänzen Sie die nebenstehende Tabelle.
- Geben Sie eine Formel für die Folge (p_n) in Abhängigkeit von n an.
- Geben Sie eine Formel für die Reihe (s_n) in Abhängigkeit von n an.
- Benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe und geben Sie die Formel für die Reihe (s_n) ohne Summe an.

Jahr	n	p_n	s_n
2017	0	1000	1100
2018	1	800	2090
2019	2	640	3003
2020	3	512	3866.5
⋮	⋮	⋮	⋮
2027	10	107.37	10 146.46

- R e) Geben Sie R-Befehle an, mit denen Sie den Bestand an „Auxburger Panther“ am Ende des Jahres 2027 bestimmen können.

Lösungshinweis:

- s.o.
- $p_n = 1000 \cdot 0.8^{n-2017}$
- $$s_n = \sum_{i=0}^n 1000 \cdot 0.8^i \cdot 1.1^{n+1-i}$$
$$= 1000 \cdot 1.1^{n+1} \sum_{i=0}^n \left(\frac{0.8}{1.1}\right)^i$$
- $$s_n = 1000 \cdot 1.1^{n+1} \cdot \frac{(0.8/1.1)^{n+1} - 1}{(0.8/1.1) - 1}$$

```
e) s.Jahr = function(Jahr){sn(Jahr-2017)}
sn = function(n){
  i=0:(n);
  round(1000 * sum(1.1^((n) + 1 - i) * 0.8^i), 2)
}

s.Jahr(2027)
## [1] 10146.46

# alternativ (ohne Summe):
sn = function(n) {
  1000 * 1.1^(n + 1) *
  ((0.8/1.1)^(n + 1) - 1) / ((0.8/1.1) - 1)
}
```

Aufgabe 3

11 Punkte

Zur Beschreibung des kumulierten Absatzes eines Produktes werden gelegentlich sogenannte *logistische Funktionen* verwendet. Gegeben ist hier $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Zeit t mit

$$f(t) = a \cdot \left(1 + 9 \cdot e^{-a \cdot b \cdot t}\right)^{-1}.$$

Dabei bezeichnen $a, b > 0$ Konstanten.

- Berechnen Sie die Sättigungsgrenze, also $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.
- Zeigen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 10 % der Sättigungsgrenze erreicht sind.
- Zeigen Sie, dass f zum Zeitpunkt

$$t_{0.5} = \frac{\ln 9}{ab}$$

genau 50 % der Sättigungsgrenze erreicht hat.

- Berechnen Sie die erste Ableitung von f .
- Für die zweite Ableitung von f gilt:

$$f''(t) = -9a^3b^2 \cdot \frac{e^{abt} (e^{abt} - 9)}{(e^{abt} + 9)^3}$$

(Dieses Ergebnis müssen Sie *nicht* nachrechnen)
Zeigen Sie, dass f für $t_{0.5}$ einen Wendepunkt hat.

Lösungshinweis:

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a \cdot \left(1 + 9 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-a \cdot b \cdot t}\right)^{-1} = a \cdot (1 + 9 \cdot 0)^{-1} = a$$

$$\text{b) } f(0) = a \cdot (1 + 9 \cdot e^0)^{-1} = a/(1 + 9) = 0.1 \cdot a$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f\left(\frac{\ln 9}{ab}\right) &= a \cdot \left(1 + 9 \cdot e^{-a \cdot b \cdot \frac{\ln 9}{ab}}\right)^{-1} = a \cdot (1 + 9 \cdot e^{-\ln 9})^{-1} \\ &= a \cdot \left(1 + \frac{9}{9}\right)^{-1} = a/(1 + 1) = 0.5 \cdot a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(t) &= 9a^2b \cdot e^{-abt} \cdot (1 + 9 \cdot e^{-abt})^{-2} \\ &= 9a^2b \cdot \frac{e^{abt}}{(e^{abt} + 9)^2} \end{aligned}$$

- e) Die Terme $9a^3b^2$, e^{abt} , $(e^{abt} + 9)^3$ haben konstantes Vorzeichen für alle $t \geq 0$, nur der Term $e^{abt} - 9$ wechselt das Vorzeichen bei

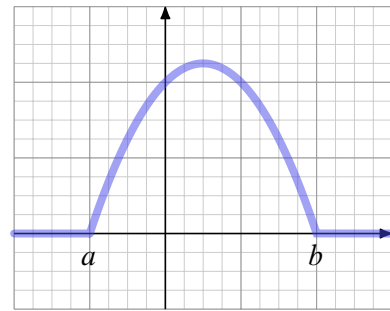
$$e^{abt} - 9 = 0 \Leftrightarrow abt = \ln 9 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 9}{ab}$$

Aufgabe 4

14 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und ihr Graph (siehe Abbildung rechts) mit

$$f(x) = \begin{cases} A(x-2)(x+1) & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$



a) Zeichnen Sie Koordinatenachsen in die Abbildung ein, die sich im Punkt $(0, 0)$ schneiden und geben Sie die Werte für a und b an.

b) Eine integrierbare Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn gilt:

$$g(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

Bestimmen Sie den Parameter $A \in \mathbb{R}$ so, dass f eine Dichtefunktion ist.

Lösungshinweis:

a) Achsen: S.o.

a, b sind die beiden Nullstellen von f , also $a = -1$ und $b = 2$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = A \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = A \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^2 \\ &= A \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right) = -\frac{9}{2}A \\ &\Rightarrow A = -\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Tom Bombadill möchte sich heute, am 1. Januar 2017, Wohnzimmermöbel für 30 000 € kaufen. Der Möbelladen bietet ihm an, dass er die Rechnung über 5 Jahre zu einem Zinssatz von 1.5 % p. a. jährlich nachschüssig mit gleich hohen Zahlungen begleichen kann.

- Wie hoch wären die jährlichen Raten für Tom?
- Angenommen Tom könnte vorschüssig statt nachschüssig bezahlen. Wären die Raten dann höher oder niedriger als in Teilaufgabe a)? (Begründung ohne Rechnung)
- Tom einigt sich mit dem Möbelgeschäft auf quartalsweise vorschüssige Zahlungen. Wie hoch sind die Raten in diesem Fall?

Lösungshinweis:

$$\text{a) } R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \Leftrightarrow r = R_0 \cdot \frac{q - 1}{1 - q^{-n}} = 30\,000 \cdot \frac{1.015 - 1}{1 - 1.015^{-5}} = 6272.68$$

b) Niedriger, die Zinsen sind niedriger, denn Tom schuldet der Bank kürzer und weniger Geld.

c) ICMA: $q_{\text{Quartal}} = q^{\frac{1}{12}} \approx 1.003\,729\,1$ und $n = 12 \cdot 5 = 20$

$$r = R_0 \cdot \frac{1 - \frac{1}{q_{\text{Quartal}}}}{1 - q_{\text{Quartal}}^{-n}} \approx 30\,000 \cdot \frac{1 - 1/1.003\,729\,088\,938\,09}{1 - 1.003\,729\,088\,938\,09^{-20}} \approx 1553.63$$

Alternativ mit Rentenersatzrate:

$$r_e = r \cdot \left(4 + i \cdot \frac{4 + 1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = r_e \cdot \left(4 + i \cdot \frac{5}{2}\right)^{-1} = 6272.68 \cdot \left(4 + 0.015 \cdot \frac{5}{2}\right)^{-1} \approx 1553.60$$

Gegeben ist eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ und ein Vektor $d \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 28 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = d$ mit Hilfe der inversen Matrix von A .
- Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A .

Lösungshinweis:

- Inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/12 \\ 1/6 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$x = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/12 \\ 1/6 & -1/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \cdot 28 + 5/12 \cdot (-16) \\ 1/6 \cdot 28 - 1/12 \cdot (-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Für das charakteristische Polynom ergibt sich:

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) - 10 = \lambda^2 + \lambda - 12.$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -4$.

- Für die beiden Eigenvektoren müssen die nicht-trivialen Lösungen der Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i)x_i = 0$$

gefunden werden. Es ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x_1 = 0, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x_2 = 0.$$

Die Lösungen kann man gleich ablesen:

$$x_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.