Klausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 5. Dezember 2015 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen
Punkte: 15, 20, 14, 21, 12, 8 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 15 Punkte

Der Nikolaus schuldet seinen Weihnachtswichteln für Auslagen beim Pizzaservice 50000,00 €. In einer Krisensitzung einigt er sich mit einer Wichteldelegation darauf, dass er seine Schulden innerhalb von 4 Jahren zu einem Jahreszins von 7,00 % zurückzahlen wird.

Stellen Sie zwei Tilgungspläne für die folgenden beiden Szenarien auf:

a) Der Kredit soll mit konstant hohen Annuitäten zurückbezahlt werden.

b) Der Kredit soll mit konstant hohen Tilgungsraten zurückbezahlt werden.

Lösungshinweis:

a) Annuität: $A = S \cdot \frac{q-1}{1-q^{-n}} = 50000{,}00 \cdot \frac{0{,}07}{1-1{,}07^{-4}} = 14761{,}41$

Jahr	Restschuld zu Beginn	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	50000,00	3500,00	11261,41	14761,41
2	38738,59	2711,70	12049,70	14761,41
3	26688,89	1868,22	12893,18	14761,41
4	13795,71	965,70	13795,71	14761,41

b) Tilgungsrate: $T = 50000{,}00/4 = 12500{,}00$

Jahr	Restschuld zu Beginn	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	50000,00	3500,00	12500,00	16000,00
2	37500,00	2625,00	12500,00	15125,00
3	25000,00	1750,00	12500,00	14250,00
4	12500,00	875,00	12500,00	13375,00

Aufgabe 2 **20 Punkte**

Aufregung am Nordpol: Viele Kinder litten Umfragen zufolge unmittelbar nach dem Nikolausabend des vergangenen Jahres an Unwohlsein. Dieses Jahr will der Nikolaus die Anzahl a der Äpfel und die Anzahl s der Schokoladennikoläuse, die er den Kindern bringt so optimieren, dass das Wohlbefinden der Kinder maximal wird. Dabei gibt es pro Fahrt mit dem Schlitten folgende Einschränkungen zu beachten:

- Die Rentiere schaffen es maximal 2150 kg Zuladung auf dem Schlitten zu transportieren. Der Nikolaus wiegt 150 kg, ein Apfel wiegt 250g, ein Schokonikolaus 50g.
- Damit die alten Äpfel vom letzten Jahr vollständig mitverwertet werden muss er mindestens 2000 Äpfel mitnehmen.
- Schokoladennikoläuse bestellt der Nikolaus günstig für 0,05 € im Internet, während er für die Äpfel (Bioqualität) 1 € pro Stück bezahlen muss. Insgesamt darf er pro Fahrt ein Budget von 4000 € nicht überschreiten.

Das zu maximierende Wohlbefinden der Kinder nach dem Besuch des Nikolaus ist gegeben durch die Funktion

$$\mathrm{ZF}(a,s) = 30 \cdot a + 3 \cdot s \quad \rightarrow \max$$

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Zielfunktion und 3 Nebenbedingungen.

b) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich. Markieren Sie die theoretisch möglichen Optimallösungen und berechnen Sie deren Koordinaten.

c) Wieviel Äpfel und wieviele Schokonikoläuse muss der Nikolaus pro Fahrt minehmen, so dass es den Kindern hinterher möglichst gut geht?

Lösungshinweis:

a)

Zielfunktion	$30a\,+$	$3s$	$\rightarrow$	max
NB 1 (Gewicht)	$0{,}25a\,+$	$0{,}05s$	$\leqq$	2000
NB 2 (Budget)	$a\,+$	$0{,}05s$	$\leqq$	4000
NB 3 (Äpfel)	a		$\geqq$	2000

b) Siehe Skizze:

c) $A = (2000, 30\,000)$,

$B = \left(\frac{8000}{3}, \frac{80\,000}{3}\right) \approx (2666{,}67, 26666{,}67)$,

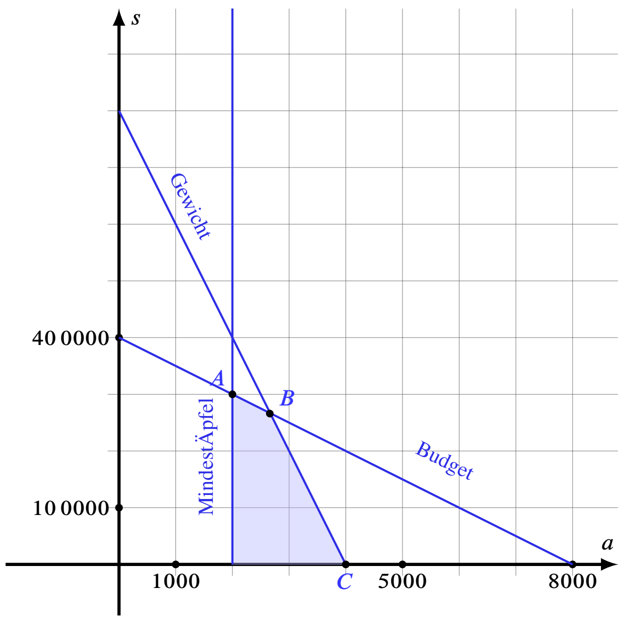
$C = (4000, 0)$. Damit

$\mathrm{ZF}(A) = 30 \cdot 2000 + 3 \cdot 30\,000 = 150\,000$,

$\mathrm{ZF}(B) = 30 \cdot \frac{8000}{3} + 3 \cdot \frac{80\,000}{3} = 160\,000$

$\mathrm{ZF}(C) = 30 \cdot 4000 + 3 \cdot 0 = 120\,000$

also ist B optimal.



Aufgabe 3 **14 Punkte**

Der Nikolaus hat beobachtet, dass die Anzahl r der erkälteten und damit nicht einsatzfähigen Rentiere von der Temperatur t (in Grad Celsius) im Stall gemäß der Differentialgleichung

$$t - r = tr' + 1$$

abhängt. Bestimmen Sie für $t > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems, wenn bei einem Grad 20 Rentiere krank sind, also $r(1) = 20$.

Lösungshinweis:

DGL:	$r' = -\frac{1}{t} \cdot r(t) + 1 - \frac{1}{t}$
allgemeine homogene Lösung:	$y_{\text{hom.}} = C \cdot \frac{1}{t}$
partikuläre Lösung:	$y_p = r_H \cdot \int \frac{s(t)}{r_H} \mathrm{d}t = \frac{t}{2} - 1$
Und damit die Gesamtlösung	$r(t) = \frac{t}{2} - 1 + \frac{C}{t}$
Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:	$r(1) = 20 = \frac{1}{2} - 1 + c \quad \Leftrightarrow \quad C = 20{,}5$
Ergebnis:	$r = \frac{1}{2}t + \frac{20{,}5}{t} - 1$

Aufgabe 4 **21 Punkte**

16 Weihnachtswichtel werden gefragt, wieviel Geschenke sie im aktuellen November und Dezember ausgeliefert haben (Merkmal X). Folgende Antworten wurden gegeben:

$$170, 130, 15, 20, 15, 155, 15, 190, 160, 160, 5, 20, 130, 10, 135, 25$$

a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, den Median sowie die Standardabweichung von X.

b) Erstellen Sie eine Tabelle der kumulierten relativen Häufigkeiten zu allen in der Umfrage genannten Ausprägungen.

c) Geben Sie zur empirischen Verteilungsfunktion F die Werte $F(15)$ und $F(160)$ an.

d) Ordnen Sie die erhobenen Werte den Klassen

Klasse	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Intervall	$[0, 15)$	$[15, 78)$	$[78, 160)$	$[160, 165)$	$[165, 190]$

zu und geben Sie zu dieser Klassierung eine Häufigkeitstabelle an.

e) Zeichnen Sie ein Histogramm der klassierten Daten.

f) Bestimmen Sie auf Basis der Klassenmitten einen Näherungswert für das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.

g) Warum unterscheidet sich die Standardabweichung der tatsächlichen Werte aus Teilaufgabe a) von dem in Teilaufgabe f) ermittelten Wert?

Lösungshinweis:

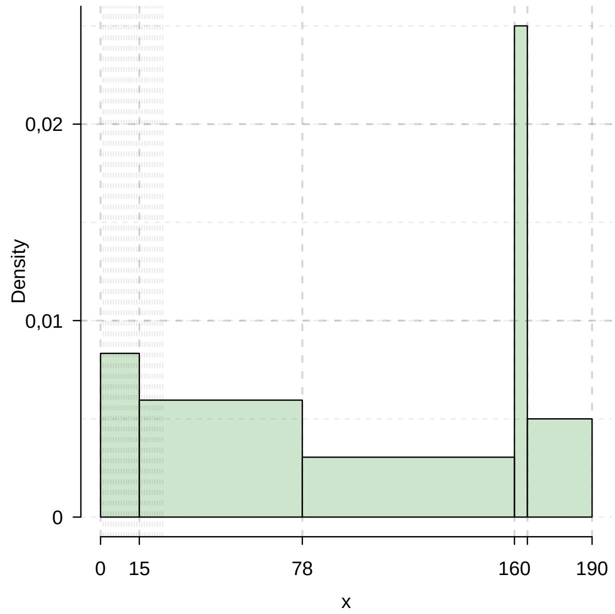
a) Für das arithmetische Mittel ergibt sich $\overline{x} = 84{,}69$. Der Median ist $x_{\text{med}} = 77{,}5$. Die Standardabweichung beträgt $s \approx 70{,}59$.

b)
```
##     5    10    15    20    25   130   135   155   160
## 0,062 0,125 0,312 0,438 0,500 0,625 0,688 0,750 0,875
##   170   190
## 0,938 1,000
```

c)
```
##      20%    80%
## x 15,00 160,00
## F  0,31   0,88
```

d)
```
##
##    [0,15)   [15,78)  [78,160) [160,165) [165,190]
##         2         6         4         2         2
```

e)
```
hist(x, breaks=Grenzen, right=FALSE, include.lowest=TRUE,
     col=rgb(0,0.5,0,.2), xaxt = "n", yaxt="n", main="")
```



f)
```r
i=1:5
Klassenmitten = (x.Klassengrenzen[i] + x.Klassengrenzen[i+1])/2
x.m = rep(Klassenmitten, h)
mean(x.m)

## [1] 91

s.m = sqrt(mean((x.m-mean(x.m))^2))
s.m

## [1] 58
```

g) aus a): $s_a = 70{,}59$
aus f): $s_f = 58{,}17$
Hauptgrund: In der Klasse K_2 liegen die meisten tatsächlichen Werte am linken Rand weiter vom arithmetischen Mittel entfernt als die Klassenmitte. Durch die große Breite der Klasse wirkt sich das stark aus und führt zum Unterschätzen der Streuung.

Aufgabe 5 **12 Punkte**

Weihnachtswichtel Willi ist vom vielen Geschenkeeinpacken heute nach dem Aufstehen ziemlich verwirrt (ein bisschen hat er am Vorabend auch am Weihnachtspunsch vom Nikolaus genascht). Er kann sich erinnern, dass es schon Dezember ist, sicher ist er sich aber nicht, welcher Tag heute ist. Auf jeden Fall ist heute noch nicht der 24. Dezember. Die vier Adventssonntage sind dieses Jahr am 29. November, am 6., am 13. und am 20. Dezember.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist heute Sonntag?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist heute der 4. Advent?

Willi weiß er aus der Vergangenheit, dass das Christkind an den Adventssonntagen am Frühstückstisch mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % ziemlich laut Weihnachtslieder singt, an den anderen Tagen des Dezembers singt es zum Glück nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 %.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Christikind an einem zufällig ausgewählten Tag (vom 1. bis zum 23. Dezember) am Frühstückstisch singt?

Willi setzt sich an den Küchentisch. Das Christkind singt.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist heute Sonntag?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist heute der 4. Advent?

Lösungshinweis:

a) $S \hat{=}$ „Heute ist Sonntag“, $V \hat{=}$ „Heute ist der 4. Advent“
$P(S) = \frac{3}{23} \approx 0{,}1304$

b) $P(V) = \frac{1}{23} \approx 0{,}0435$

c) $C \hat{=}$ „Das Christkind singt“,
$P(C) = P(S) \cdot P\big(C|S\big) + P\big(\overline{S}\big) \cdot P\big(C|\overline{S}\big) = 0.9 \cdot 3/23 + 0{,}05 \cdot 20/23 \approx 0{,}1609.$

d) $P(S|C) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}9 \cdot 3/23}{0.9 \cdot 3/23 + 0{,}05 \cdot 20/23} = \dfrac{27}{37} \approx 0{,}7297$

e) $P(V|C) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}9 \cdot 1/23}{0.9 \cdot 3/23 + 0{,}05 \cdot 20/23} = \dfrac{9}{37} \approx 0{,}2432$

Aufgabe 6 **8 Punkte**

Weihnachtswichtel Willi backt Lebkuchen. Der Nikolaus kommt am Nachmittag zu einer Überraschungskontrolle und entnimmt eine einfache Stichprobe von 20 Stück aus Willis Produktion. Für das Gewicht X_i eines Lebkuchens (in Gramm) ermittelt er in der Stichprobe die folgenden Ausprägungen a_i bzw. deren Häufigkeiten h_i.

a_i	190	200	210	220	230	240	250	260	270
h_i	1	1	2	4	4	3	2	2	1

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass das Gewicht der Lebkuchen aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammt.

Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert des Gewichts der Lebkuchen zu einem Konfidenzniveau von 95 %.

Lösungshinweis:

$$c = x_{0,975} = 2{,}093,\ \overline{x} = 231,\ s = 20{,}749 \quad \Rightarrow \quad \left[\overline{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}}\right] = [221{,}289;\ 240{,}711]$$