Nachholklausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 11. März 2017 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen
Punkte: 16, 20, 13, 21, 12, 8 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 16 Punkte

Egon möchte heute, am 1.1.2017, eine neue Küche kaufen. Dazu hat er verschiedene Finanzierungsoptionen. Der Jahreszins in jeder Variante soll 1,7 % betragen.

4 a) Egon könnte die Küche über 5 Jahre mit einer jährlich nachschüssigen Rate in Höhe von 2068 € abstottern. Wie hoch wäre der gesamte Kaufpreis heute?

3 b) Wären die Raten beim gleichen Kaufpreis aber vorschüssiger Ratenzahlung höher oder niedriger, wenn die Küche ebenfalls nach 5 Jahren abgezahlt sein soll? (Es ist eine Rechnung oder eine Begründung Ihrer Antwort nötig)

[*Hinweis: Falls Sie den Kaufpreis in Aufgabe a) nicht ermitteln konnten, rechnen Sie bitte mit einem (falschen) Wert von 10.000 € weiter.*]

5 c) Egon möchte die Küche mit gleich hohen, monatlich vorschüssigen Raten über 5 Jahre bezahlen. Berechnen Sie die Höhe einer solchen Rate.

4 d) Wie hoch wäre eine Rate, wenn Egon 6 Jahre zum Begleichen der Schuld Zeit hätte, aber vierteljährlich nachschüssig bezahlen müsste?

Lösungshinweis:

Endwert statt BW: −2

a) $R_0 = 2068 \cdot \frac{q^5-1}{q-1} \cdot q^{-5} \approx 9832{,}89\,€.$ (4)

Falsche oder keine Begründung: −3

(3) b) Niedriger, weil früher eingezahlt wird und damit weniger Sollzinsen fällig sind.
Alternativ ausrechnen: $r = R_0 \cdot \frac{q-1}{(1-q^{-5})\cdot q} = 2033{,}43$

c) ~~Nach ICMA: $q_{\text{Monat}} = \sqrt[12]{1{,}017} \approx 1{,}0014057$. Mit $n = 5 \cdot 12 = 60$ folgt:~~

$$\cancel{r = R_0 \cdot \frac{1-\frac{1}{q_{\text{Monat}}}}{1-q_{\text{Monat}}^{-n}} = 9832{,}89 \cdot \frac{1-\frac{1}{q_{\text{Monat}}}}{1-q_{\text{Monat}}^{-60}} \approx 170{,}76}$$

- Exakt: Für die Rentenersatzrate gilt: $r_e = R_0 \cdot \frac{q-1}{1-q^{-n}}$

Damit ergibt sich: $r = \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right)^{-1} \cdot \boxed{r_e}$ (2)

$$= \left(12 + 0{,}017 \cdot \tfrac{13}{2}\right)^{-1} \cdot \boxed{9832{,}89} \cdot \frac{1{,}017-1}{1-1{,}017^{-5}}$$

$\approx 170{,}76$ (3)

2068,− aus a)

Rundungsfehler wg. Zwischenerg. ohne Speicher −2

d) ▸ Nach ICMA: $q_{\text{Quartal}} = \sqrt[4]{1{,}017} \approx 1{,}0042232$. Mit $n = 6 \cdot 4 = 24$ folgt:

$$r = R_0 \cdot \frac{q_{\text{Quartal}}-1}{1-q_{\text{Quartal}}^{-n}} = 9832{,}89 \cdot \frac{q_{\text{Quartal}}-1}{1-q_{\text{Quartal}}^{-24}} \approx 431{,}68$$

- Exakt: Für die Rentenersatzrate gilt: $r_e = R_0 \cdot \frac{q-1}{1-q^{-n}}$

Damit ergibt sich: $r = \left(4 + i \cdot \frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot r_e$

$$= \left(4 + 0{,}017 \cdot \tfrac{3}{2}\right)^{-1} \cdot 9832{,}89 \cdot \frac{1{,}017-1}{1-1{,}017^{-6}}$$

$\boxed{\approx 431{,}67}$

falsches Zwischenerg. (10000): $\boxed{439{,}01}$

(4)

16

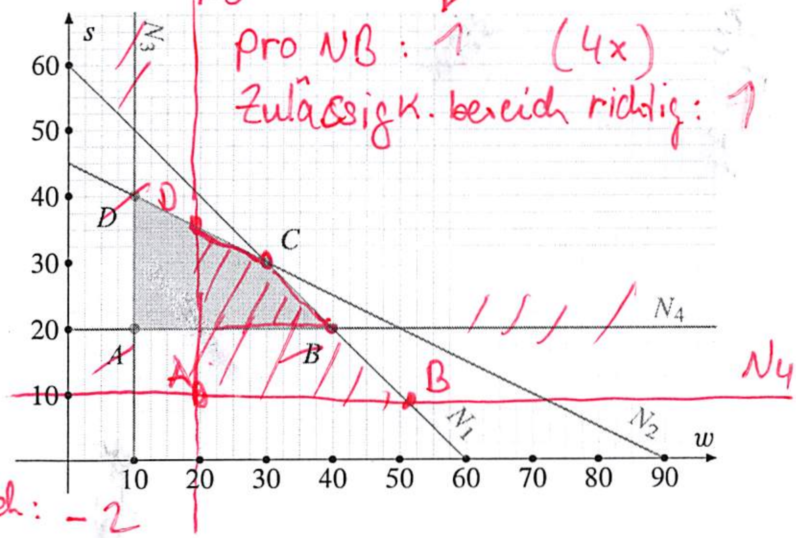
Aufgabe 2 ~~20~~ Punkte

Ein Produzent von Autoreifen produziert Winter- und Sommerreifen. Für die Produktion eines Winterreifens benötigt er 5 kg Gummi und 2 kg Klebstoff. Ein Sommerreifen kann mit 5 kg Gummi und 4 kg Klebstoff produziert werden. Der Produzent schaut in sein Lager und stellt fest, dass er über 300 kg Gummi und 180 kg Klebstoff verfügt. Er hat seinen Abnehmern zugesagt mindestens 10 Sommerreifen und 20 Winterreifen zu liefern.

≠ : −2

a) Schreiben Sie das System der 4 Nebenbedingungen auf; notieren Sie dazu die Anzahl der Winter- bzw. Sommerreifen mit w bzw. s.

b) Verdeutlichen Sie in nebenstehendem Koordinatensystem grafisch den Zulässigkeitsbereich der Nebenbedingungen.



Lösungshinweis:

8

a) $5w + 5s \leqq 300$

$2w + 4s \leqq 180$

s $\cancel{w} \geqq 10$

w $\cancel{s} \geqq 20$

≠ oder falsch: −2

Aufgabe 3 13 Punkte

Bestimmen Sie für $v > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$2v^2w' - vw - v^2 = v, \quad w(2) = 4\,.$$

Lösungshinweis:

$\Leftrightarrow$ $$w' = \frac{1}{2v} \cdot w + \frac{1}{2}(1 + v^{-1})$$ 2

allgemeine homogene Lösung: $$w_{\text{hom.}} = C \cdot e^{\frac{1}{2}\int v^{-1}\,dv} = C \cdot v^{\frac{1}{2}}$$ 2

mit $$C(v) = \int \frac{\frac{1}{2}(1 + v^{-1})}{v^{\frac{1}{2}}}dv = v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}$$ 2

folgt die partikuläre Lösung $$w_p = v^{\frac{1}{2}} \cdot \left(v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}\right) = v - 1$$ 2

Und damit die Gesamtlösung $$w(v) = C \cdot v^{\frac{1}{2}} + v - 1$$ 1

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt: $$w(2) = C\sqrt{2} + 2 - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{\sqrt{2}}$$ 2

Ergebnis: $$w = 3\sqrt{\frac{v}{2}} + v - 1$$ 2

Aufgabe 4 **21 Punkte**

Stefan Jumper nimmt seit 8 Jahren am gleichen Marathon teil und hat jedes Jahr seine Trainings- und Ergebnisdaten dokumentiert. Er hat dazu pro Jahr jeweils die Ergebniszeit im Marathon (Merkmal *Ergebnis Marathon*, in Minuten) sowie die durchschnittliche Anzahl gelaufener Trainingskilometer in den 8 bzw. 16 Wochen vor dem Marathon (Merkmal *8-Wochen-Trainings-Durchschnitt* bzw. *16-Wochen-Trainings-Durchschnitt*, jeweils in km pro Woche) in der folgenden Tabelle festgehalten:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8
Ergebnis Marathon	172	161	156	147	152	167	157	168
8-Wochen-Trainings-Durchschnitt	85	105	125	150	130	90	110	95
16-Wochen-Trainings-Durchschnitt	70	80	120	125	125	100	105	75

Sie haben Stefan laufend von den interessanten Themen der Statistik-Vorlesung berichtet, die Sie in diesem Semester besucht haben. Stefan wünscht sich daraufhin von Ihnen eine statistische Auswertung seiner Ergebnisse.

a) Stefan vermutet, dass der 8-Wochen-Trainings-Durchschnitt eine bessere Prognose für seine gelaufene Marathonzeit darstellt als der 16-Wochen-Trainings-Durchschnitt.

6

Berechnen Sie jeweils einen geeigneten Korrelationskoeffizienten, vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und geben Sie an, ob Stefans Vermutung durch das Ergebnis gestützt wird.

b) Bestimmen Sie den Funktionsterm eines linearen Regressionsmodells für das Ergebnis im Marathon in Abhängigkeit vom 8-Wochen-Trainings-Durchschnitt.

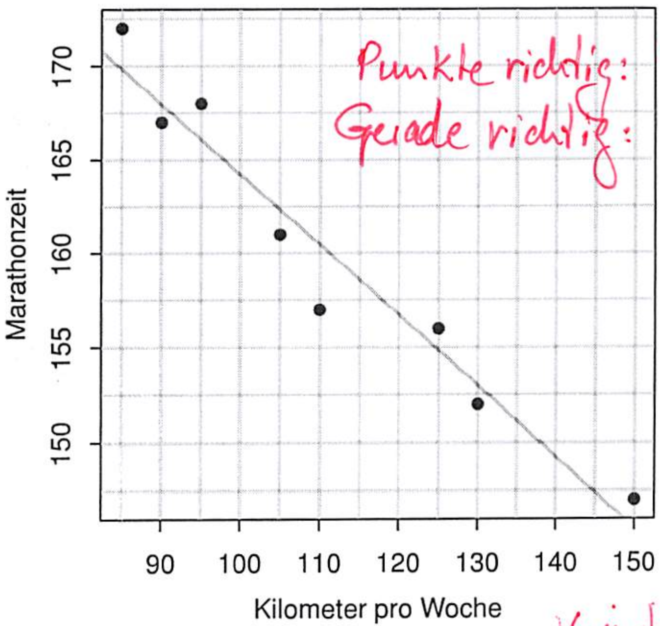
5

c) Zeichnen Sie die Datenpunkte sowie die Regressionsgerade in das nebenstehende Koordinatensystem ein. Beschriften Sie dazu auch die Achsen geeignet. (Hinweis: Der Schnittpunkt der Koordinatenachsen soll nicht bei (0, 0) liegen)

5

d) Welche Marathonzeit erwartet Stefan auf Grundlage des linearen Modells für einen 8-Wochen-Trainings-Durchschnitt von 175 km pro Woche?

5



Punkte richtig: 2
Gerade richtig: 3

Variablen vertauscht:

b) −5
c) −3
d) −5

Lösungshinweis:

```
options(OutDec = ".")
Marathon    = c(172, 161, 156, 147, 152, 167, 157, 168)
WochenKM.8  = c(85, 105, 125, 150, 130, 90, 110, 95)
```

A4

```
WochenKM.16 = c(70, 80, 120, 125, 125, 100, 105, 75)
A = data.frame(Marathon, WochenKM.8, WochenKM.16)
```

```
c( cor(Marathon, WochenKM.8), cor(Marathon, WochenKM.16) )

## [1] -0.9728112 -0.8804509
```

a) 8 Wochen 16 Wochen

4 4

8 Woche besser: 2

```
Marathon.Regression = lm(Marathon ~ WochenKM.8)
MR.C = Marathon.Regression$coefficients
a = MR.C[1]
b = MR.C[2]
c(a, b)

## (Intercept)  WochenKM.8
## 201.6290323  -0.3741935
```

b) Erg = 201.63 - 0.374 · Wochenkm 5

c) → Grafik

```
MR.predict = function(x){as.numeric(a+b*x)}
MR.predict(175)

## [1] 136.1452
```

d)

Aufgabe 5

~~12~~ 14 **Punkte**

Zwei faire Würfel werden geworfen. Folgende Ereignisse werden definiert:

- A: Die Augensumme beider Würfel beträgt 3
- B: Die Augensumme beider Würfel beträgt 7
- C: Mindestens einer der beiden Würfel zeigt eine 1

a) Tragen Sie die folgenden gesuchten Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein. Geben Sie auch jeweils eine kurze Begründung oder Berechnung für das Ergebnis an.

	Gesucht	Ergebnis	Begründung
2	$P(A)$	$2/36 \approx$ **5,56** %	$A = \{(1,2), (2,1)\}$
2	$P(B)$	$6/36 \approx$ **16,67** %	$A = \{(1,6), (2,5), \ldots, (6,1)\}$
1	$P(C)$	$11/36 \approx$ **30,56** %	$C = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,1)\}$
1	$P(C \cap A)$	$2/36 \approx$ **5,56** %	$= P(A)$
1	$P(C \cup A)$	$11/36 \approx$ **30,56** %	$= P(C)$
1	$P(A\|C)$	$2/11 \approx$ **18,18** %	$P(A \cap C)/P(C) = P(A)/P(C)$
1	$P(C\|A)$	1	$P(A)/P(A)$
1	$P((A \cup B)\|C)$	$4/11 \approx$ **36,36** %	$(A \cup B) \cap C = \{(1,2), (2,1), (1,6), (6,1)\}$

b) Sind A und C unabhängig?

c) Sind B und C unabhängig?

Lösungshinweis:

a) siehe oben

2 b) Nein, da $P(A|C) = 2/11 \neq 2/36 = P(A)$

2 c) Nein, da $P(B|C) = 2/11 \neq 6/36 = P(B)$

Aufgabe 6 8 Punkte

Ein Hersteller von Schrauben möchte die Produktionsgenauigkeit einer Charge mit einer Solllänge von 100 mm überprüfen. Dazu werden 16 Stück Schrauben aus der Produktionsanlage entnommen und deren Länge gemessen. Es ergibt sich:

Stichprobenelement Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Länge der Schraube [in mm]	99	103	107	99	102	102	104	101
Stichprobenelement Nr.	9	10	11	12	13	14	15	16
Länge der Schraube [in mm]	108	102	103	105	101	99	107	95

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Länge der vermessenen Schrauben eine einfache Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit aller hergestellten Schrauben darstellen.

Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für die Länge aller Schrauben in der Produktion zu einem Konfidenzniveau von 90 %.

Lösungshinweis:

$c = x_{0,95} = \underline{1{,}753}, \overline{x} = \underline{102{,}312}, s = \underline{3{,}439} \quad \Rightarrow \quad \left[\overline{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}}\right] = \underline{[100{,}805;\ 103{,}82]}$

2 2 2 2 2