Klausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 17. November 2018 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wing
Punkte: 13, 10, 9, 9, 30, 19 ;   Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 13 Punkte

Kreuzen Sie pro Zeile jeweils genau einmal wahr oder falsch an. Ein richtig gesetztes Kreuz ergibt jeweils einen Punkt.

Der relative unterjährige Zins ist nötig

	wahr	falsch
wenn mehrfach pro Jahr Zinsen abgerechnet werden,	X	
wenn mehrfach pro Jahr Einzahlungen getätig werden,		X
Raten in konstanter Höhe regelmäßig mehrmals pro Jahr eingezahlt werden,		X
wenn nur alle $n \in \mathbb{N}, n > 1$ Jahre Zinsabrechnungen vorgenommen werden.		X

Eine Küche zum Preis von 20 000 € soll über drei Jahre zu einem jährlichen Zinssatz von 0.1 % abbezahlt werden. Dazu wird die (korrekte) Formel $R_0 = r \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \cdot q^{-n}$ verwendet.

	wahr	falsch
Der Preis der Küche entspricht dann $R_0 \cdot q^n$.	X	~~X~~
$q = 1.01$.		X
Es muss jedes Jahr eine Rate in Höhe von 6666.67 € bezahlt werden.		X

Auch OK (nicht ganz eindeutig)

Bei der Annuitätentilgung errechnet sich die Restschuld zu Beginn des Jahres t,

	wahr	falsch
wenn von der Schuldsumme die Summe der bis zu diesem Zeitpunkt bezahlten Tilgungsraten abgezogen wird,	X	
wenn von der t-1 Jahre lange aufgezinsten Schuldsumme der nachschüssige Rentenendwert der ersten t-1 Annuitäten abgezogen wird,	X	
wenn von der Schuldsumme der Rentenbarwert von t-1 Annuitäten abgezogen wird und das Ergebnis dann mit q^{t-1} multipliziert wird.	X	

Bei einem festverzinslichen gesamtfälligen Wertpapier

	wahr	falsch
wird der Kupon jeweils am Ende des Jahres ausgezahlt,	X	
wird der Kupon auch am Ende des letzten Jahres ausgezahlt,	X	
kann man sich den Rücknahmekurs am Ende jedes Jahres ausbezahlen lassen.		X

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Ira legt heute, am 1. Januar 2018, einen Betrag in Höhe von 1500 € auf ein mit einem Zinssatz von 1.5 % p. a. verzinsten Konto an.

a) Wie hoch ist der Betrag inklusive Zinsen am 1.1.2026?

b) Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz auf dem Anlagekonto sein, damit sie inkl. Zinsen am 1.1.2026 über einen Betrag in Höhe von 2302.03 € verfügt?

c) Wie lange müsste Ira warten, bis sich ihre heute angelegten 1500 € auf dem mit 1.5 % p. a. verzinsten Konto auf 2302.03 € entwickelt hätte?

d) Ira zahlt heute 1500 € auf das Konto ein. Wie hoch ist der Realwert dieser Einzahlung am 1.1.2026, wenn für die Anlagezeit zusätzlich zu dem Anlagezinssatz eine durchschnittliche jährliche Inflationsrate von 2.3 % p.a. angenommen werden kann?

Lösungshinweis:

9 statt 8 Jahre: −2

3 a) $1500 \cdot 1.015^8 = 1689.74$

2 b) $q = \sqrt[8]{\frac{2302.03}{1500}} \approx 1.0550 \mathrel{\widehat{=}} 5.500\,\%$

3 c) $n = \log_{1.015} \frac{2302.03}{1500} \approx 28.77$

2 d) $1500 \cdot \left(\frac{1.015}{1.023}\right)^8 = 1408.69$

Rundungsfehler: −1

statt: 1.023^{-1}
mit $(1-0.023)$ gerechnet : −2

Aufgabe 3 — 9 Punkte

Ein Anleger kann in zwei Projektvarianten investieren. Es gelte ein jährlicher Kalkulationszinssatz von 1.5 %.

Die Höhe der Zahlungen (Beträge in Tausend €) zu den jeweiligen Zeitpunkten (in Jahren, jeweils zum Jahresbeginn) seien jeweils:

Zeitpunkt	0	1	2	3
Projektvariante A	-1500	900	720	0
Projektvariante B	-959	600	400	35

a) Entscheiden Sie auf Basis des Kapitalwerts der beiden Varianten, welche bevorzugt werden sollte.

b) Wie hoch müsste bei Projekt A die Zahlung zum Zeitpunkt 3 sein, so dass beide Projekte finanzmathematisch äquivalent wären.

Lösungshinweis:

a)

Zeitpunkt	0	1	2	3	Kapitalwert
Projekt A	-1500.00	900.00	720.00	0.00	
Barwerte A	-1500.00	886.70	698.88	0.00	85.58 (2)
Projekt B	-959.11	600.00	400.00	35.00	
Barwerte B	-959.11	591.13	388.26	33.47	53.76 (2)

Also: Projekt A hat den höheren Kapitalwert und ist somit vorzuziehen. (2)

b) ~~$K_0^A + \Delta A_1 \cdot 1.015^{-1} = K_0^B \Leftrightarrow \Delta A_1 = (K_0^B - K_0^A) \cdot 1.015^1 \approx -32.29$~~
~~$A_1 = 867.71$~~ (3)

$K_0^A + A_3 \cdot 1.015^{-3} = K_0^B$

$\Leftrightarrow A_3 = (K_0^B - K_0^B) \cdot 1.015^3 = -33.27$

(nicht abgezinst: -31.82)
-2

Aufgabe 4 **9 Punkte**

Ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Laufzeit von 8 Jahren ist mit einem Kupon von 2 % und einem Rücknahmekurs von 101 % ausgestattet. Zum Emissionszeitpunkt herrscht für dieses Papier eine Umlaufrendite von 1.5 %.

a) Wie hoch ist der Emissionskurs dieser Anleihe?

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen konnten, gehen Sie für Teilaufgabe b) vom (falschen) Wert von $C_0 = 90\,\%$ aus.

b) Berechnen Sie die Zahlungen von bzw. an einen Anleger zu den Zeitpunkten $t = 0, t = 1$ und $t = 8$, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Betrag von 50 000 € in die Anleihe investieren möchte.

c) Bestimmen Sie den Kurs unmittelbar nach der 2. Kuponzahlung, wenn zu diesem Zeitpunkt die Umlaufrendite 5 % beträgt.

Inkosistent bei Kupon und Cn mit Prozente gerechnet: -2

Lösungshinweis:

3

Formel richtig, Wert falsch: -1

a) $C_0 = 2 \cdot \frac{1 - 1.015^{-8}}{1.015 - 1} + 101 \cdot 1.015^{-8} = \underline{104.63}$ 1

b) t_0: 50 000 € investiert (zu je 104.63 ergibt 477.8713 Papiere) 1

t_1: Kuponzahlungen von 2 € für 477.8713 Papiere ergibt eine Auszahlung von 955.74 € 1

t_{50}: Kupon plus Rücknahmekurs: $(2 + 101) \cdot 477.8713 = 49\,220.75$ Euro 1

c) Restlaufzeit $8 - 2 = 6$ Jahre:

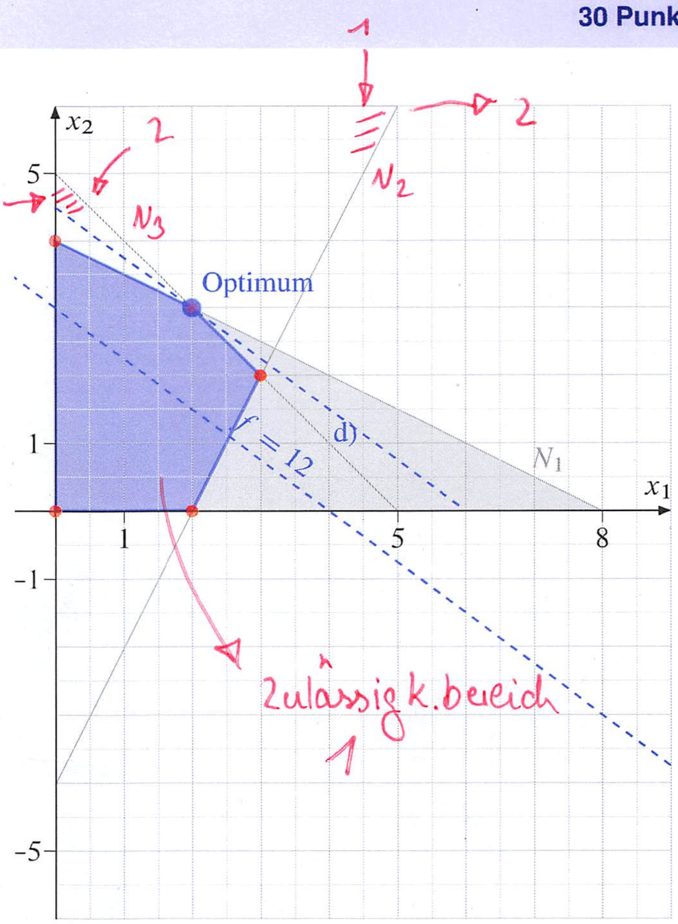
mit 2 Jahren Restlaufzeit: -3

$$C_2 = 2 \cdot \frac{1 - 1.05^{-6}}{1.05 - 1} + 101 \cdot 1.05^{-6} = \underline{85.5191}$$ 3

Aufgabe 5 **30 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit

- den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$,
- der Zielfunktion $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ und
- den Nebenbedingungen N_1, N_2, N_3 (dabei ist N_1 nur teilweise gegeben).



f	$3x_1$	$+$	$4x_2$	$\to$	max
N_1	x_1	$+$	$2x_2$	$\leqq$	8
N_2	$2x_1$	$-$	x_2	$\leqq$	4
N_3	x_1	$+$	x_2	$\leqq$	5

3

a) Die graphische Repräsentation von N_1 ist im Koordinatensystem eingezeichnet. Füllen Sie in der Tabelle oben die fehlenden Felder von N_1 aus. 3

b) Zeichnen Sie N_2, N_3 sowie den Zulässigkeitsbereich des Problems in das Koordinatensystem ein. 7

c) Markieren Sie die für ein Optimum in Frage kommenden Ecken. 5

d) Zeichnen Sie alle Punkte der Zielfunktion für $f(x_1, x_2) = 12$ ein (Isonutzengerade). 3

e) Berechnen Sie die Koordinaten im Optimum sowie den dazugehörigen Wert der Zielfunktion. 3

f) Nach einem Schritt des Simplexalgorithmus ergibt sich das folgende Tableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		Operation
5	-1	0	2	0	0	16	1 $+ 2 \cdot$ 2
6	$1/2$	1	$1/2$	0	0	4	$+1/2 \cdot$ 2
7	$5/2$	0	$1/2$	1	0	8	3 $+ 1/2 \cdot$ 2
8	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	1	4 $- 1/2 \cdot$ 2

Dabei bezeichnet die Zeile Nummer 5 die Zielfunktion. Führen sie einen weiteren Simplexschritt durch und geben Sie den Wert aller Struktur-, Schlupfvariablen sowie der Zielfunktion nach diesem Schritt an.

Lösungshinweis:

Z	$3x_1$	$+$	$4x_2$	$\to$	max
N_1	x_1	$+$	$2x_2$	$\leqq$	8
N_2	$2x_1$	$+$	$-1x_2$	$\leqq$	4
N_3	x_1	$+$	x_2	$\leqq$	5

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		Operation
1	-3	-4	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	8	
3	2	-1	0	1	0	4	
4	1	1	0	0	1	5	
5	-1	0	2	0	0	16	1 $+ 2 \cdot$ 2
6	$1/2$	1	$1/2$	0	0	4	$+1/2 \cdot$ 2
7	$5/2$	0	$1/2$	1	0	8	3 $+ 1/2 \cdot$ 2
8	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	1	4 $- 1/2 \cdot$ 2
9	0	0	1	0	2	18	5 $+ 2 \cdot$ 8
10	0	1	1	0	-1	3	6 $- 1 \cdot$ 8
11	0	0	3	1	-5	3	7 $- 5 \cdot$ 8
12	1	0	-1	0	2	2	$+2 \cdot$ 8

5

$x_3 = y_1 = y_3 = 0$

$x_1 = 2$ 1
$x_2 = 3$ 1
$y_2 = 3$ 1

ZF = 18
1

Aufgabe 6 **19 Punkte**

Die Ladung eines Kondensators $Q(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit $t > 0$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = U(t)\,.$$

Dabei bezeichnet C die Kapazität des Kondensators, R den ohmschen Widerstand, und $U(t)$ die anliegende Spannung.

a) Welche Lösung ergibt sich für $U(t) = 0$ für eine Anfangsladung von $Q(0) = Q_0$?
In welcher Zeit ist die anfängliche Ladung auf den Wert $\frac{Q_0}{\mathrm{e}}$ abgesunken (e bezeichnet dabei die Eulersche Zahl)?

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $Q(0) = Q_0$ sowie eine konstant angelegte Spannung $U(t) = U_0 > 0$.

Lösungshinweis:

12

a) $\underbrace{Q' = -\frac{1}{RC} \cdot Q + \frac{U(t)}{R}}_{3} \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \mathrm{e}^{\int -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t} = \underbrace{K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}_{3}$
Mit der Anfangsbedingung ergibt sich $Q(t) = \underbrace{Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}_{3}$, damit gilt $Q(t = RC) = \underbrace{q_0 \cdot \mathrm{e}^{-1}}_{3}$

b) Partikuläre Lösung:

9

$Q_p(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \cdot \int \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot RC \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t} = \underbrace{U_0 \cdot C}_{3}$
Einsetzen der Anfangsbedingung:
$Q(0) = U_0 \cdot C + K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}0} = Q_0$ → 3
$\Rightarrow Q(t) = \underbrace{U_0 \cdot C + (Q_0 - U_0 \cdot C) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}_{3}$

Klausur Wirtschaftsmathematik (alte PO)
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 17. November 2018 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wing
Punkte: 8, 9, 26, 17, 20, 10 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 **8 Punkte**

Ein Anleger kann in zwei Projektvarianten investieren. Es gelte ein jährlicher Kalkulationszinssatz von 1.5 %.

Die Höhe der Zahlungen (Beträge in Tausend €) zu den jeweiligen Zeitpunkten (in Jahren, jeweils zum Jahresbeginn) seien jeweils:

Zeitpunkt	0	1	2	3
Projektvariante A	-1500	900	720	0
Projektvariante B	-959	600	400	35

a) Entscheiden Sie auf Basis des Kapitalwerts der beiden Varianten, welche bevorzugt werden sollte.

b) Wie hoch müsste bei Projekt A die Zahlung zum Zeitpunkt 3 sein, so dass beide Projekte finanzmathematisch äquivalent wären.

Lösungshinweis:

a)

Zeitpunkt	0	1	2	3	Kapitalwert
Projekt A	-1500.00	900.00	720.00	0.00	
Barwerte A	-1500.00	886.70	698.88	0.00	85.58 (2)
Projekt B	-959.11	600.00	400.00	35.00	(2)
Barwerte B	-959.11	591.13	388.26	33.47	53.76

Also: Projekt A hat den höheren Kapitalwert und ist somit vorzuziehen. (2)

b) $K_0^A + \Delta A_1 \cdot 1.015^{-1} = K_0^B \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A_1 = \left(K_0^B - K_0^A\right) \cdot 1.015^1 \approx -32.29$
$A_1 = 867.71$ (2)

Aufgabe 2 **9 Punkte**

Ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Laufzeit von 8 Jahren ist mit einem Kupon von 2 % und einem Rücknahmekurs von 101 % ausgestattet. Zum Emissionszeitpunkt herrscht für dieses Papier eine Umlaufrendite von 1.5 %.

a) Wie hoch ist der Emissionskurs dieser Anleihe?

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen konnten, gehen Sie für Teilaufgabe b) vom (falschen) Wert von $C_0 = 90\,\%$ aus.

b) Berechnen Sie die Zahlungen von bzw. an einen Anleger zu den Zeitpunkten $t = 0, t = 1$ und $t = 8$, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Betrag von 50 000 € in die Anleihe investieren möchte.

c) Bestimmen Sie den Kurs unmittelbar nach der 2. Kuponzahlung, wenn zu diesem Zeitpunkt die Umlaufrendite 5 % beträgt.

Lösungshinweis:

a) $C_0 = 2 \cdot \dfrac{1 - 1.015^{-8}}{1.015 - 1} + 101 \cdot 1.015^{-8} = 104.63$

b) t_0: 50 000 € investiert (zu je 104.63 ergibt 477.8713 Papiere)
t_1: Kuponzahlungen von 2 € für 477.8713 Papiere ergibt eine Auszahlung von 955.74 €
t_{50}: Kupon plus Rücknahmekurs: $(2 + 101) \cdot 477.8713 = 49\,220.75$ Euro

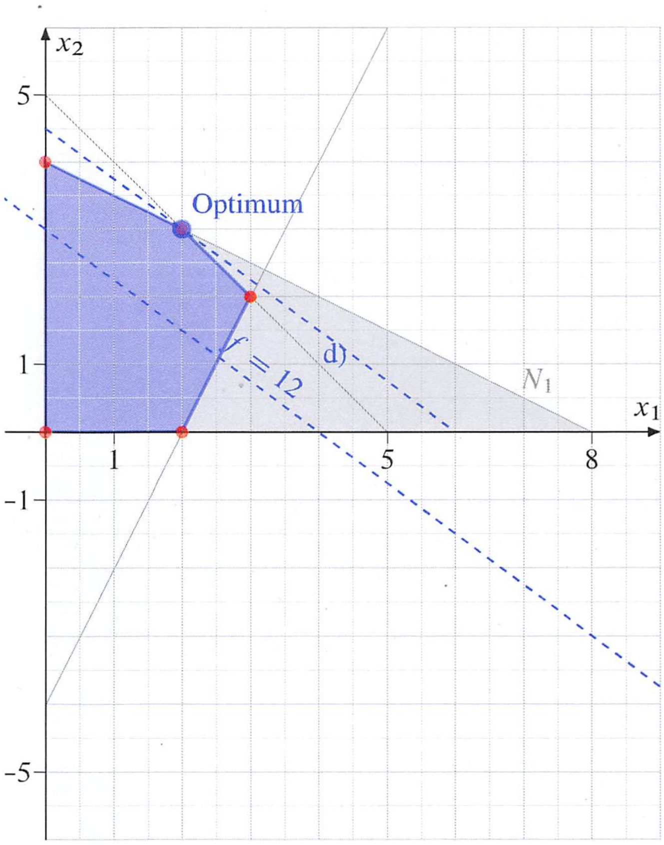
c) Restlaufzeit $8 - 2 = 6$ Jahre:
$$C_2 = 2 \cdot \frac{1 - 1.05^{-6}}{1.05 - 1} + 101 \cdot 1.05^{-6} = 85.5191$$

Aufgabe 3 **26 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit

- den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$,
- der Zielfunktion $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ und
- den Nebenbedingungen N_1, N_2, N_3 (dabei ist N_1 nur teilweise gegeben).

f	$3x_1$	$+$	$4x_2$	$\rightarrow$	max
N_1	$\boxed{x_1}$	$+$	$\boxed{2x_2}$	$\leqq$	$\boxed{8}$
N_2	$2x_1$	$-$	x_2	$\leqq$	4
N_3	x_1	$+$	x_2	$\leqq$	5



a) Die graphische Repräsentation von N_1 ist im Koordinatensystem eingezeichnet. Füllen Sie in der Tabelle oben die fehlenden Felder von N_1 aus.

b) Zeichnen Sie N_2, N_3 sowie den Zulässigkeitsbereich des Problems in das Koordinatensystem ein.

c) Markieren Sie die für ein Optimum in Frage kommenden Ecken.

d) Zeichnen Sie alle Punkte der Zielfunktion für $f(x_1, x_2) = 12$ ein (Isonutzengerade).

e) Berechnen Sie die Koordinaten im Optimum sowie den dazugehörigen Wert der Zielfunktion.

f) Nach einem Schritt des Simplexalgorithmus ergibt sich das folgende Tableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		Operation
5	-1	0	2	0	0	16	① $+ 2 \cdot$ ②
6	$1/2$	1	$1/2$	0	0	4	$+1/2 \cdot$ ②
7	$5/2$	0	$1/2$	1	0	8	③ $+ 1/2 \cdot$ ②
8	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	1	④ $- 1/2 \cdot$ ②

Dabei bezeichnet die Zeile Nummer 5 die Zielfunktion. Führen sie einen weiteren Simplexschritt durch und geben Sie den Wert aller Struktur-, Schlupfvariablen sowie der Zielfunktion nach diesem Schritt an. Lösungshinweis:

Z	$3x_1$	$+$	$4x_2$	$\rightarrow$	max
N_1	x_1	$+$	$2x_2$	$\leqq$	8
N_2	$2x_1$	$+$	$-1x_2$	$\leqq$	4
N_3	x_1	$+$	x_2	$\leqq$	5

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		Operation
1	-3	-4	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	8	
3	2	-1	0	1	0	4	
4	1	1	0	0	1	5	
5	-1	0	2	0	0	16	① $+ 2 \cdot$ ②
6	$1/2$	1	$1/2$	0	0	4	$+1/2 \cdot$ ②
7	$5/2$	0	$1/2$	1	0	8	③ $+ 1/2 \cdot$ ②
8	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	1	④ $- 1/2 \cdot$ ②
9	0	0	1	0	2	18	⑤ $+ 2 \cdot$ ⑧
10	0	1	1	0	-1	3	⑥ $- 1 \cdot$ ⑧
11	0	0	3	1	-5	3	⑦ $- 5 \cdot$ ⑧
12	1	0	-1	0	2	2	$+2 \cdot$ ⑧

Aufgabe 4 — 17 Punkte

Die Ladung eines Kondensators $Q(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit $t > 0$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = U(t)\,.$$

Dabei bezeichnet C die Kapazität des Kondensators, R den ohmschen Widerstand, und $U(t)$ die anliegende Spannung.

a) Welche Lösung ergibt sich für $U(t) = 0$ für eine Anfangsladung von $Q(0) = Q_0$?
   In welcher Zeit ist die anfängliche Ladung auf den Wert $\frac{Q_0}{\mathrm{e}}$ abgesunken (e bezeichnet dabei die Eulersche Zahl)?

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $Q(0) = Q_0$ sowie eine konstant angelegte Spannung $U(t) = U_0 > 0$.

Lösungshinweis:

a) $Q' = -\frac{1}{RC} \cdot Q + \frac{U(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \mathrm{e}^{\int -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$
   Mit der Anfangsbedingung ergibt sich $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$, damit gilt $Q(t = RC) = q_0 \cdot \mathrm{e}^{-1}$

b) Partikuläre Lösung:
   $Q_p(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \cdot \int \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot RC \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t} = U_0 \cdot C$
   Einsetzen der Anfangsbedingung:
   $Q(0) = U_0 \cdot C + K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}0} = Q_0$
   $\Rightarrow Q(t) = U_0 \cdot C + (Q_0 - U_0 \cdot C) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

Alte PO

Aufgabe 5 — 20 Punkte

Aufgabenteil I

In der Augsburger Innenstadt werden 25 Personen nach der Anzahl ihrer Haustiere (Merkmal X) befragt. Daraus ergibt sich die folgende Urliste:

$$x = (2, 0, 4, 1, 1, 1, 0, 0, 4, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 2, 1, 1, 1)$$

a) Erstellen Sie eine Tabelle mit den absoluten sowie den kumulierten relativen Häufigkeiten.

b) Geben Sie zu X das empirische Quantil $\tilde{x}_{0.92}$ an.

c) Bestimmen Sie den Modus, den Median, das arithmetische Mittel sowie die mittlere quadratische Abweichung von X.

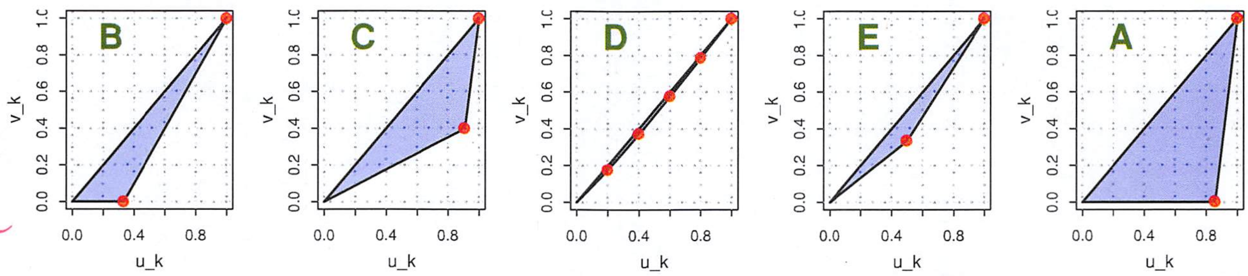
Aufgabenteil II

Toni hat zu den metrischen Merkmalen A, B, C, D, E jeweils eine Urliste ermittelt (siehe Tabelle rechts). Für jedes Merkmal hat er auch den zugehörigen (nicht normierten) Ginikoeffizienten berechnet und eine Lorenzkurve gezeichnet.
Leider sind seine Unterlagen völlig durcheinandergekommen und er weiß nicht mehr, welche Urliste zu welchem Koeffizienten und zu welcher Kurve gehört.

Merkmal	Urliste
A	0, 0, 0, 0, 5, 0, 0
B	1, 1, 0
C	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 15, 1, 1, 1
D	100, 107, 110, 90, 105
E	5000, 2500

d) Schreiben Sie in die Grafik jeder Lorenzkurve den Bezeichner ($A - E$) des jeweiligen zugehörigen Merkmals.

max. 4 pro Fehler −1



e) Schreiben Sie unter jeden der Ginikoeffizienten G den Bezeichner ($A - E$) des jeweiligen zugehörigen Merkmals.

4 s.o.

Wert des Ginikoeffizienten	0.509	0.857	0.037	0.167	0.333
Buchstabe des Merkmals	C	A	D	E	B

Alte PO

Aufgabe 5

Fo18 S

Lösungshinweis:

4 a)

Anzahl Haustiere a_j	0	1	2	4
absolute Häufigkeit h_j	7	11	5	2
kumulierte relative Häufigkeit F_j	0.28	0.72	0.92	1.00

4 b)

```
quantile(xI, probs = alpha, type=2)
## 92%
##   3
```

4 c) $x_{\text{Mod}} = 1$ $\quad x_{\text{Med}} = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{13} = 1$

$\overline{x} = 1.16$ $\quad s^2 = 1.1744$

d) siehe oben

e) siehe oben

Alte PO

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Schneewittchen und ihre Schwester Rosenrot bekommen je eine Schale mit je 5 Äpfeln geschenkt. In Schneewittchens Schale sind 5 grüne Äpfel von denen 3 giftig und 2 ungiftig sind. In Rosenrots Schale sind 5 rote Äpfel von denen 2 giftig und 3 ungiftig sind.

Beim gemeinsamen Picknick isst Schneewittchen 2 grüne Äpfel und Rosenrot 3 rote Äpfel (das Gift wirkt sehr langsam, so dass beide genug Zeit zum Essen haben). Welche der beiden Schwestern hat eine besser Überlebenschance, wenn

a) ein vergifteter Apfel für eine tödliche Vergiftung ausreicht?

b) zwei vergiftete Äpfel gegessen werden müssen um eine tödliche Wirkung zu erzielen?

Geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen die beiden Schwestern in den jeweiligen Szenarien sterben.

Lösungshinweis:

a) Man rechnet wie wahrscheinlich es ist, dass Sie nicht vergiftet werden und nimmt dann die Gegenwahrscheinlichkeit:

$$P_{\text{Schnewittchen}}(\text{tot}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$
$$P_{\text{Rosenrot}}(\text{tot}) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

In diesem Fall sterben beide mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %.

b) Dieser Fall ist ein wenig schwieriger, denn man muss sich jeweils mehrere Szenarien ansehen. Das einfachste ist es, jeweils einen Baum zu zeichnen (G steht für einen giftigen Apfel). Schneewittchen stirbt nur im Fall GG, wohingegen Rosenrot in den Fällen $GG\overline{G}$, $G\overline{G}G$ und $\overline{G}GG$ stirbt, wobei G für giftigen Apfel steht und $\overline{G}$ für einen ungiftigen Apfel (GGG kann es nicht geben, da Rosenrot nur zwei vergiftet Äpfel hat). Damit ergibt sich:

$$P_{\text{Schnewittchen}}(\text{tot}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0.3$$
$$P_{\text{Rosenrot}}(\text{tot}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.3.$$

Auch in diesem Fall sind die beiden Wahrscheinlichkeiten gleich groß.