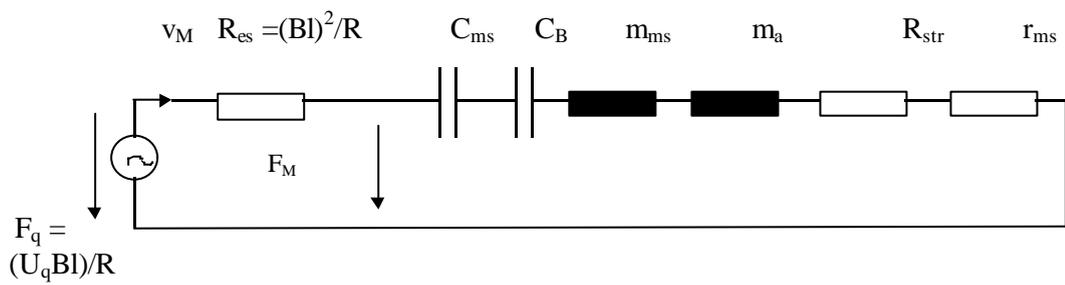




Fachhochschule Augsburg
Fachbereich Elektrotechnik

Lautsprechermodell



Prof. Dr. C. Clemen
WS 98/99

Zusammenfassung

Dieses Skript entstand im WS9 98/99 als Zusatz für die Vorlesung Elektroakustik.

Es wird das Modell für einen Lautsprecher mit geschlossenem Gehäuse dargestellt. Die Ableitung geht von den Grundlagen der Akustik [3] aus, behandelt die Schallwellen und Schallausbreitung und leitet das Thiele-Small-Modell für den Lautsprecher ab, in dem dieser durch konzentrierte Bauelemente einer elektrischen RLC-Schwingkreis-Ersatzschaltung 2. Ordnung beschrieben wird [1].

Inhaltsverzeichnis

1	SCHALLWELLEN	1
1.1	Ebene Welle	2
1.2	Kugelwelle	4
1.3	Allgemeine Wellengleichung	7
1.4	Kolbenstrahler in unendlicher Schallwand	8
2	DER LAUTSPRECHER	10
2.1	Mechanisches Schwingungssystem	14
2.2	Näherungsformel für abgestrahlte Leistung	19
2.3	Übertragungsfunktion	21
2.4	Elektrische Eingangsimpedanz	24
3	BEISPIEL	27
	LITERATUR	29

1 Schallwellen

Schall besteht aus mechanischen Schwingungen und Wellen in Luft und festen Körpern.

Zum Verständnis der Schallausbreitung und Schallübertragung sind zwei **elementare Wellenformen** von besonderer Wichtigkeit, die ebene Schallwelle und die Kugelwelle.

Die Anregung der Schallwelle erfolgt durch schwingende Körper. Eine ebene Schallwelle kann z.B. durch eine Kolbenmembran in einem Rohr erzeugt werden, eine Kugelwelle durch eine atmende Kugel.

Eine Auslenkung der Oberfläche führt zu einer Kompression der benachbarten Luft. Diese Störung teilt sich verzögert der umgebenden Luft mit, auch die benachbarten Luft-Teilchen werden aus der Ruhelage ausgelenkt und führen zu einer Ausbreitung der Störung. Dabei wird Energie durch das Medium übertragen, es kommt jedoch nicht zu einem Massetransport. (Die Energie wird durch die kinetische bzw. die potentiellen Energie der Teilchen übertragen).

Die von der Welle pro Zeit durch eine kleine Fläche transportierte Energie pro Fläche wird als **Schallintensität** bezeichnet.

Ebene Welle : Die Schallintensität bleibt bei der Ausbreitung konstant.

Kugelwelle: Die Schallintensität nimmt umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstandes ab. Mit der Ausbreitung der Welle sind lokale Schwankungen der Dichte, der gemittelten Teilchengeschwindigkeit (= Schallschnelle) und des Drucks um ihre Gleichgewichtswerte verbunden.

$$\rho_{ges} = \rho_0 + \rho_{\sim}$$

$$p_{ges} = p_0 + p_{\sim}$$

$$v_{ges} = v_0 + v_{\sim}$$

$$\vec{v}_{ges} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\sim}$$

Die Wechselgrößen ρ_{\sim} und p_{\sim} sind klein gegen ρ_0 und p_0 . v_0 ist nur ungleich Null, wenn eine überlagerte Windströmung vorhanden ist und kann deswegen i.a. weggelassen werden.

Hörschall: Umfaßt den Frequenzbereich von 16 Hz bis 16 000 Hz und die entsprechenden Wellenlängen von 21 m bis 2,1 cm ($c = \lambda f$, mit $c = 340$ m/s bei 20 °C).

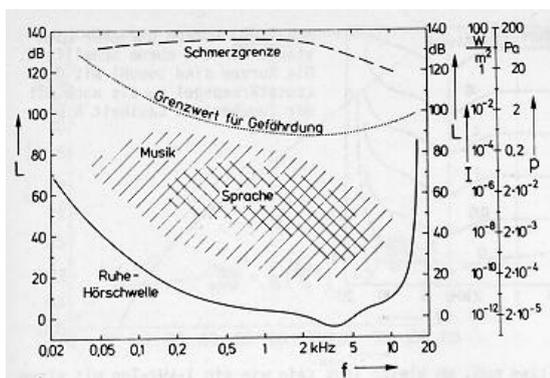


Abbildung 1: Hörfläche [1]

Bezugsschalldruck entsprechend der genormten Hörschwelle des menschlichen Ohres bei 2 kHz: $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$), **Schallpegel** $L_p = 20 \log(p/p_{ref})$ dB \Rightarrow Hörschwelle bei 0 dB; Schmerzgrenze bei 120 dB (20 Pa).

Die Wechselgrößen p_{\sim} und ρ_{\sim} sind klein gegen den atmosphärischen Druck von $p_0 = 1 \text{ atm} = 1000 \text{ HektoPa} = 10^5 \text{ Pa}$ und die

Luftdichte $\rho_0 = 1,14 \text{ kg/m}^3$ (20 °C).

Im folgenden werden wir bei den Wechselgrößen den Index \sim weglassen und sie als **Wechseldichte**, **Schalldruck** und **Schallschnelle** bezeichnen.



Zur Aufstellung der **Wellengleichung** verwenden wir drei Grundgesetze der Mechanik:

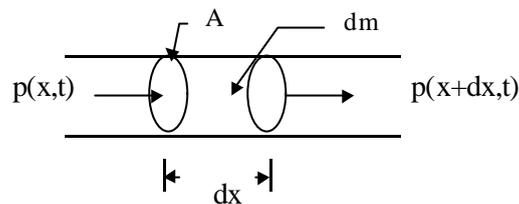
1. das Newton'sche Trägheitsgesetz
2. das Kontinuitätsgesetz (Massenerhaltung)
3. die adiabatische Zustandsgleichung für Gase

und werten diese für ein kleines gedachtes Volumenelement aus, das beliebig aus dem Bereich, in dem sich die Schallwelle ausbreitet, herausgegriffenes ist.

1.1 Ebene Welle

Ausbreitung nur in x-Richtung

Das Volumenelement sei eine Scheibe der Dicke dx , dessen vordere und rückwärtige Oberflächen (Fläche A) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle liegen.



Dieses gedachte Volumenelement mit der Masse $dm = \rho_0 A dx$ wird durch die Kraft $-\delta p A$ beschleunigt ($-\delta p = p(x-dx/2,t) - p(x+dx/2,t)$) und erfährt dabei die Trägheitskraft

$$dm \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

Daraus folgt eine erste Differentialgleichung zwischen den Schallfeldgrößen v und p :

$$\mathbf{r}_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-1)$$

Während der Zeit dt fließt die Masse $\rho_0 v(x-dx/2,t) dt A$ von links in das Volumenelement hinein, während die Masse $-\rho_0 v(x+dx/2,t) dt A$ rechts aus dem Volumenelement abfließt. Daraus resultiert im Volumenelement die Massenänderung $dm = \delta \rho A dx$, die einer Zunahme (oder Abnahme) der Dichte um $\delta \rho$ entspricht. Daraus folgt eine zweite Differentialgleichung zwischen den Schallfeldgrößen v und ρ :

$$\mathbf{r}_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-2)$$

Schließlich liefert das adiabatische Gasgesetz einen Zusammenhang zwischen Schalldruck p und Wechseldichte ρ :

$$p V^k = \text{const} \Rightarrow \frac{p_{ges}}{\mathbf{r}_{ges}^k} = \text{const} \Rightarrow d \left(\frac{p_{ges}}{\mathbf{r}_{ges}^k} \right) = \frac{dp}{\mathbf{r}_{ges}^k} + \frac{\mathbf{k} \cdot p_{ges} d\mathbf{r}}{\mathbf{r}_{ges}^{k+1}} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{mit } dp = p_{\approx} = p \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\approx} = \mathbf{r} \Rightarrow \quad (1-3)$$

$$\frac{p}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{k} \cdot p_0}{\mathbf{r}_0}$$



Der Schalldruck ist demnach proportional der Wechseldichte. Der Wert der Proportionalitätskonstante ist - wie sich gleich zeigen wird - gleich dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit.

Ersetzt man in Gl. (1-2) ρ durch p und eliminiert aus Gleichung (1-1) und (1-2) v (erste Gleichung partiell nach t zweite partiell nach x differenzieren, Reihenfolge der Differentiation vertauschen), so ergibt sich die Wellengleichung für $p(x,t)$ und $v(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\mathbf{k} \cdot p_0}{\mathbf{r}_0}} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

für Luft bei 20 °C

(1-4)

Die allgemeine Lösung kann nämlich als Überlagerung einer mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c nach rechts bzw. nach links laufenden Welle dargestellt werden

$$p(x,t) = p_+(ct-x) + p_-(ct+x) \quad \text{und} \quad v(x,t) = v_+(ct-x) + v_-(ct+x).$$

Als Lösung mit harmonischer Zeitabhängigkeit (Sinusschwingung) ergibt sich

$$p(x,t) = p_+ \cos(\omega t - kx + \varphi_+) + p_- \cos(\omega t + kx + \varphi_-)$$

$$v(x,t) = v_+ \cos(\omega t - kx + \varphi_+) + v_- \cos(\omega t + kx + \varphi_-)$$

In komplexer Form lautet die Lösung für die nach rechts laufende harmonische Welle

$$\underline{p}(x,t) = \text{Re} \{ p_+ e^{-jk \cdot x} e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \underline{p}(x,t) \}$$

$$\underline{v}(x,t) = \text{Re} \{ v_+ e^{-jk \cdot x} e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \underline{v}(x,t) \}$$
(1-5)

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz und $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl. Es gilt $c = \lambda f$ oder $c = \omega/\beta$.

Die Rechnungen werden vorteilhaft gleich mit den komplexen Phasoren durchgeführt. Für diese ergibt sich durch Einsetzen der Lösung (1-5) in die Wellengleichung (1-4) der Wellenwiderstand

$$Z_0 = \frac{p}{v} = \mathbf{r}_0 c = 410 \frac{\text{N} / \text{m}^2}{\text{m} / \text{s}}$$
(1-6)

Der Wellenwiderstand ist analog zum elektrischen Widerstand in einem Stromkreis als das Verhältnis von Ursache zu Wirkung definiert. Im elektrischen Stromkreis stellt man sich als Ursache die treibende Spannung vor und den Strom I als Wirkung, hier den Schalldruck als Ursache und als Wirkung die Schallschnelle. Der Proportionalitätsfaktor ist durch die Stoffkonstanten des Mediums gegeben.

Ein wichtige Größe stellt die Schallintensität dar. Sie gibt Aufschluß über die mit der Welle transportierte Energie.

Zur Ableitung berechnen wir die Energie, die von der Welle in der Zeit dt durch eine gedachte Fläche A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird und drücken diese durch die Schallfeldgrößen aus.



$$dW = F dx = p v dt A$$

Daraus ergibt sich der momentane Wert der pro Zeiteinheit und Flächeneinheit transportierten Energie, der Schallfluß oder die Schallintensität zu (harmonische Zeitabhängigkeit vorausgesetzt)

$$I(t) = p(t)v(t) = p(t)^2/Z_0 = Z_0 v(t)^2$$

Die pro Fläche übertragene gemittelte Leistung ergibt sich unter Beachtung von

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\mathbf{w} \cdot t) dt = \frac{1}{2}$$

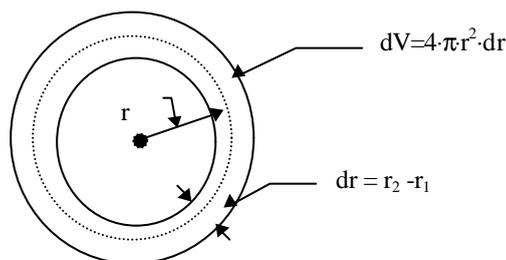
zu

$$I = p_{\text{eff}} v_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z_0} = Z_0 v_{\text{eff}}^2 \quad (1-7)$$

Man vergleiche die entsprechenden Formeln aus der Wechselstromlehre $P = UI = U^2/R = RI^2$.

1.2 Kugelwelle

Als besonders einfachen Fall betrachten wir die **kugelsymmetrische Ausbreitung** einer punktförmigen Störung (atmende Kugel) im Kontinuum.



Aufgrund der Symmetrie setzen wir $p = p(r,t)$ und $v = v_r = v(r,t)$, $\rho = \rho(r,t)$.

Für das Volumenelement nehmen wir eine Kugelschale mit Radius r und der Dicke dr (s.o.) an.

Newton :

Das Volumenelement mit der Masse $dm = \rho_0 4\pi r^2 dr$ erfährt durch die Kraft $\delta p 4\pi r^2$ die Beschleunigung $\delta v/\delta t$. Daraus folgt eine erste Differentialgleichung zwischen v und p :

$$r_0 \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}t} = - \frac{\mathcal{I}p}{\mathcal{I}r} \quad (1-8)$$

Kontinuitätsgleichung:

Dem gedachten Volumenelement fließt während der Zeit dt die Luftmasse

$\rho(r_1)v(r_1)dt 4\pi r_1^2$ zu und die Luftmasse $\rho(r_2)v(r_2)dt 4\pi r_2^2$ ab, wobei $r_{1,2} = r \pm dr/2 \Rightarrow$

$$dm \approx \rho_0 v(r_1)dt 4\pi r_1^2 - \rho_0 v(r_2)dt 4\pi r_2^2.$$

Andererseits ist $dm \approx \delta \rho 4\pi r^2 dr$. Daraus folgt eine zweite Differentialgleichung zwischen ρ und v :

$$\frac{\mathcal{I}\rho}{\mathcal{I}t} = - \frac{r_0}{r^2} \frac{\mathcal{I}(r^2 v)}{\mathcal{I}r} \quad (1-9)$$

Mit der Zustandsgleichung für Gase $p = c^2 \rho$ folgt



$$\frac{\mathcal{I} p}{\mathcal{I} t} = -\frac{\mathbf{r}_0 c^2}{r^2} \frac{\mathcal{I}(r^2 v)}{\mathcal{I} r} \quad (1-10)$$

Die Lösung von (1-8) und (1-10) vereinfacht sich durch Einführen des Geschwindigkeitspotentials. Für eine wirbelfreie Strömung ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) kann man die Funktion $\Phi = \text{grad } v$ definieren. In unserem Fall ist

$$v_r = \frac{\mathcal{I} \Phi}{\mathcal{I} r} \quad (1-11)$$

Setzt man dies in Gleichung (1-8), so findet man nach Vertauschen der Reihenfolge beim Differenzieren:

$$p = -\mathbf{r}_0 \frac{\mathcal{I} \Phi}{\mathcal{I} t} \quad (1-12)$$

Setzt man dies in Gleichung (1-10) ein, so ergibt sich nach Umformungen die Wellengleichung

$$\frac{\mathcal{I}^2 (r\Phi)}{\mathcal{I} r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{I}^2 (r\Phi)}{\mathcal{I} t^2} \quad (1-13)$$

Aus dieser Gleichung liest man die Lösung für eine sich vom Ursprung weg ausbreitende harmonische Kugelwelle ab:

$$\Phi(r, t) = \frac{B_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (1-14)$$

Daraus ermittelt man nach (1-11) und (1-12) durch Differentiation die Funktionen für den Schalldruck und die Schallschnelle

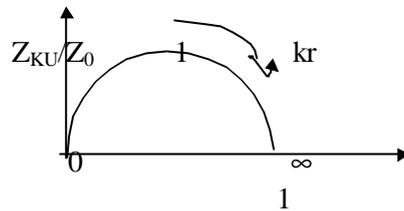
$$\begin{aligned} \underline{p}(r, t) &= -\mathbf{r}_0 \frac{B_0 j \omega}{r} e^{j(\omega t - kr)} \\ \underline{v}(r, t) &= -B_0 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (1-15)$$

Im sogenannten Nahfeld, gekennzeichnet durch $kr < 1$, schwingen p und v an einem bestimmten Ort nicht mehr in Phase und der Schalldruck nimmt mit abnehmendem Abstand schwächer zu als die Schnelle. Das läßt sich auch aus dem (komplexen) Wellenwiderstand der Kugelwelle ablesen:

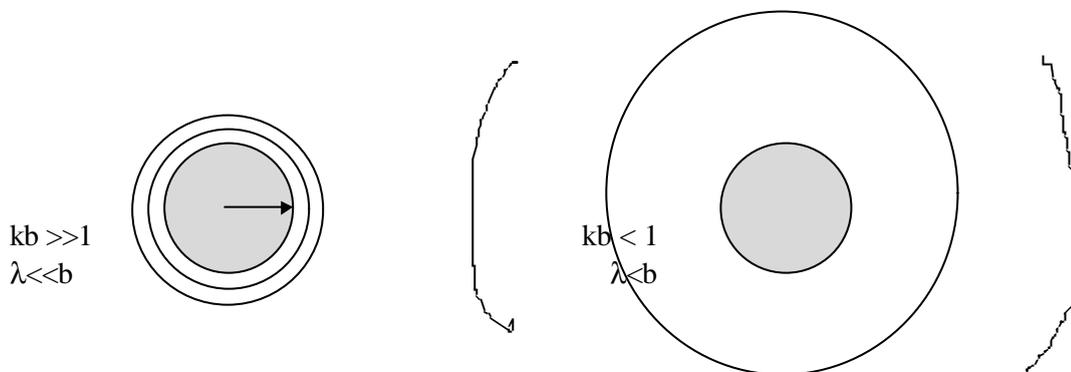
$$\boxed{\underline{Z}_{Ku} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = Z_0 \frac{jk r}{1 + jk r}} \quad (1-16)$$



Ortskurve:



Den Grund dafür, daß im Nahfeld der Schalldruck mit abnehmendem Abstand zum Ursprung stärker abnimmt als die Schnelle, erkennt man, wenn man die Anregung dieser Welle durch eine schwingende Quelle mit dem Radius b (atmende Kugel) betrachtet



Für $kb \gg 1$ ist $\lambda \ll b$ (Abb. links). Das Volumen, in dem die komprimierte (oder verdünnte) Luft eingeschlossen ist, ändert sich beim Fortschreiten der Welle (z.B. über eine Wellenlänge) nur unwesentlich. Es wird daher eine quasi-ebene Welle angeregt, deren Wellenwiderstand gleich dem der ebenen Welle ist und bei der p und v an jedem Ort in Phase sind. Dagegen entsteht für $kb < 1$ ($\lambda > b$) (Abb. rechts) beim Fortschreiten der Wellenfront (z.B. um eine Wellenlänge) eine starke Vergrößerung des Volumens. Der Druckaufbau fällt geringer aus als bei der ebenen Welle und es ergibt sich an einem bestimmten Ort eine Phasenverschiebung zwischen Schnelle und Druck.

In diesem Fall berechnet sich die Schallintensität (im Gegensatz zu Formel (1-7) nach der Formel:

$$I = p_{eff} v_{eff} \cos \mathbf{j} = \operatorname{Re} \{ Z_{Ku} \} v_{eff}^2 \quad (1-17)$$

Diese Formel entspricht der elektrischen Wirkleistung in der Wechselstromlehre für den Fall, daß Strom und Spannung nicht in Phase sind $P = UI \cos \varphi$.

Der Schalldruck im Abstand $r \gg b$ läßt sich aus der Membranschnelle v_M (= Schnelle, mit der die atmende Kugeloberfläche schwingt) berechnen:



$$kb \ll 1 \Rightarrow \operatorname{Re}\{Z_{Ku}\} \approx Z_0 \cdot (kb)^2 \Rightarrow$$

$$\text{abgestrahlte Leistung } P = I(b) \cdot A = Z_0 \cdot (kb)^2 v_M^2 4\pi b^2 \Rightarrow$$

$$\text{Schallintensität } I \text{ im Abstand } r: I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{p^2}{Z_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{p(r) = r_0 \frac{4\pi b^2 f}{r} v_M} \quad (1-18)$$

1.3 Allgemeine Wellengleichung

Komplizierte Abstrahlungsphänomene, wie z.B. Abstrahlung von einer schwingenden Membran oder durch Lautsprecher Zeilen, lassen sich durch Überlagerung von Kugel- Wellen behandeln.

Manchmal ist auch die Wellengleichung für kompliziertere Anordnungen aufzustellen und zu lösen, z.B. Abstrahlung durch einen Trichter, Eigenwellen in Hohlräumen.

Zur Aufstellung der Wellengleichung für diesen allgemeinen Fall geht man von einem kleinen gedachten Volumen aus und formuliert die drei Grundgesetze für diese Volumen.

$$\int_V \mathbf{r}_{ges} \frac{\mathcal{I}\vec{v}}{\mathcal{I}t} dV = - \oint_{O(V)} p d\vec{A} \Rightarrow \mathbf{r} \frac{\mathcal{I}\vec{v}}{\mathcal{I}t} = - \operatorname{grad} p$$

$$\oint_{O(V)} (\mathbf{r}_{ges} \vec{v}) \cdot d\vec{A} = - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \int_V \mathbf{r}_{ges} dV \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{r}_{ges} \vec{v}) = - \frac{\mathcal{I} \mathbf{r}}{\mathcal{I}t}$$

$$p = c^2 \mathbf{r}$$

Zur Lösung führt man das Geschwindigkeitspotential Φ ein (Wirbelfreies Strömungsfeld: $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow$ es gibt ein Φ mit $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$). Durch Einsetzen findet man, daß Φ die Wellengleichung erfüllt und p und \mathbf{v} durch einfache Differentiationsprozesse aus Φ erhalten werden können:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{I}^2 \Phi}{\mathcal{I}t^2}$$

$$p = -\mathbf{r} \frac{\mathcal{I} \Phi}{\mathcal{I}t}$$

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$$

Um die Abstrahlung von einem Lautsprecher zu beschreiben, werden idealisierte Annäherungen an das reale System betrachtet.

- Kolbenstrahler in unendlicher Schallwand
- Kolbenstrahler am Ende eines langen Rohres
- Verschiedene Oberflächenformen des Kolbenstrahlers, wie Konus (konkav) und Kalotte (konvex)
- Trichterstrahler
- Druckkammer
- Strahlergruppen

Im folgenden wird die Abstrahlung von einer schwingenden Kolbenmembran in unendlicher Schallwand abgeleitet.



1.4 Kolbenstrahler in unendlicher Schallwand

Zur Bestimmung des Schallfeldes vor der Kolben-Membran (kreisrund mit Radius a) wird die Überlagerungsmethode angewendet. Man stelle sich vor, daß jeder Punkt der Membran Ausgangspunkt einer Kugelwelle ist. Das Geschwindigkeitspotential aller Quellen wird überlagert und anschließend wird aus dem resultierenden Gesamtpotential der Schalldruck und die Schallschnelle berechnet. Daraus läßt sich dann auch die Richtcharakteristik bestimmen.

Integriert man den Schalldruck an der Kolbenoberfläche über diese, so erhält man die auf den bewegten Kolben rückwirkende Kraft. Der Quotient aus der Reaktionskraft und der Kolbengeschwindigkeit ist die Strahlungsimpedanz des Kolbenstrahlers Z_{ko} .

Die Rechnung liefert folgendes Ergebnis [1]:

$$\underline{p} = \mathbf{r}_0 j \omega \cdot v \cdot a^2 \frac{J_1(ka \sin \mathbf{J}) e^{j(\omega t - kr)}}{ka \sin \mathbf{J} r}$$

$$\underline{Z}_{ko} = \frac{F}{\underline{v}} = Z_0 A \left(1 - 2 \frac{J_1(2ka)}{2ka} + j 2 \frac{H_1(2ka)}{2ka} \right)$$

dabei sind $J_1(x)$ und $H_1(x)$ die Besselfunktion und die Neumannfunktion erster Ordnung

Durch Entwicklung erhält man folgende Näherungen:

$$\operatorname{Re}\{Z_{ko} / (Z_0 A)\} \approx \frac{(ka)^2}{2} \quad \text{für } ka < 2, \quad \approx 1 \quad \text{für } ka > 2$$

$$\operatorname{Im}\{Z_{ko} / (Z_0 A)\} \approx \frac{8ka}{3\pi^2} \quad \text{für } ka < 1, \quad \approx \frac{2}{\pi ka} \quad \text{für } ka > 1$$

Für eine kreisrunde Membran mit dem Radius a sind in Abb.2 der Strahlungswiderstand pro Flächeneinheit (Realteil der Strahlungsimpedanz) und die mitschwingende Mediummasse (Imaginärteil der Strahlungsimp. geteilt durch die Kreisfrequenz) pro Flächeneinheit als Funktion von $2ka$ dargestellt.

$$\underline{Z}_{ko} = R_{Str} + j \omega \cdot m_a$$

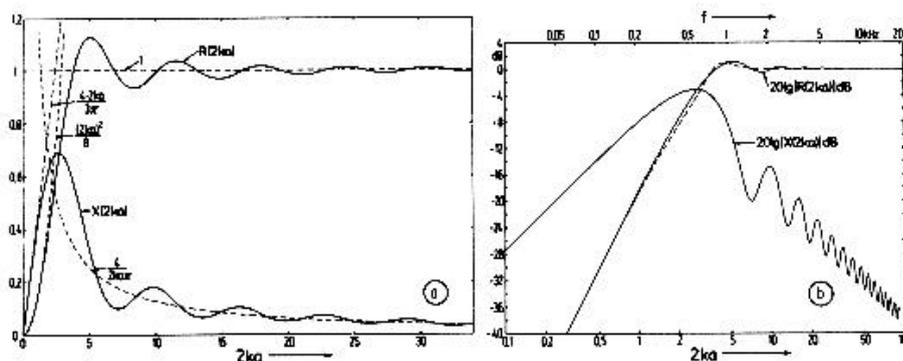
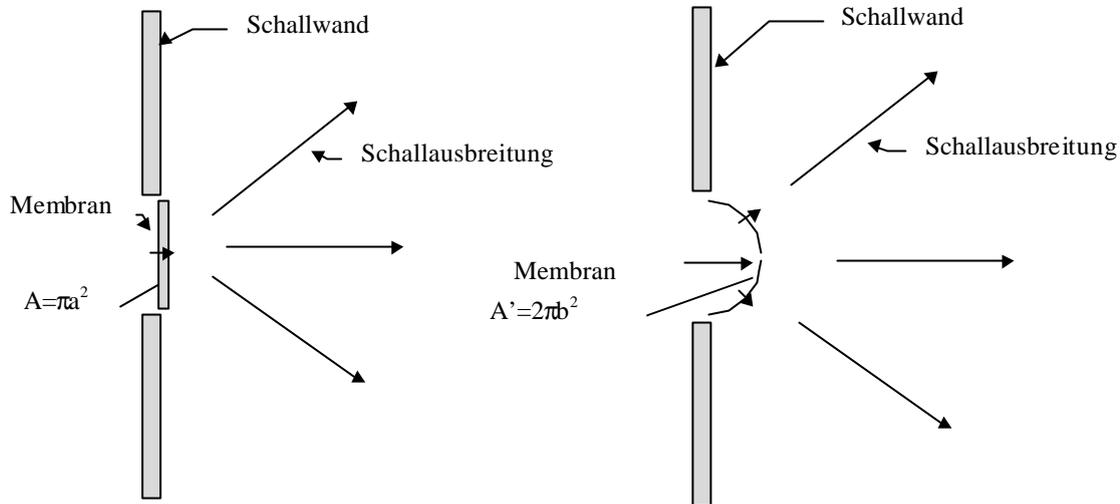


Abbildung 2: Real und Imaginärteil der mechanischen Impedanz einer Kolbenmembran in unendlicher Schallwand [1]

Dabei ist vorausgesetzt, daß der mitschwingende Kolben nur in einen Halbraum Schall abstrahlt; bei zweiseitiger Abstrahlung ist die Strahlungsimpedanz doppelt so groß.

Näherungsweise läßt sich die Strahlungsimpedanz der Kolbenmembran auch dadurch ableiten, daß man die Membran durch einen atmenden Kugelstrahler 0.-Ordnung, mit dem Radius $b = a/\sqrt{2}$ (Membranoberfläche gleich halbe Kugeloberfläche: $A = A' \Rightarrow b = a/\sqrt{2}$) ersetzt.





Strahlungsimpedanz der Kugelwelle an Oberfläche der Membran:

$$\underline{Z}_{ku} = \frac{p}{v} = Z_0 \frac{jkb}{1 + jkb} = Z_0 \left\{ \frac{(kb)^2}{1 + (kb)^2} + j \frac{kb}{1 + (kb)^2} \right\} \quad (1-19)$$

$$\text{für } kb \ll 1 \Rightarrow R_{Str} = \text{Re}\{\underline{Z}_{ku} A\} \approx Z_0 A (kb)^2 = Z_0 A \frac{(ka)^2}{2}$$

Abgestrahlte Leistung :

$$P = R_{Str} |v|^2 = Z_0 \pi a^2 \frac{(ka)^2}{2} |v|^2 = 2Z_0 \frac{|v|^2 \mathbf{p}^3 a^4}{\mathbf{I}^2} \quad (1-20)$$

Die abgestrahlte Leistung wird oft auch durch die maximale Auslenkung der Membran $x_0 = |v_M|/\omega$, sowie den Schallfluß $q = |v_M| A_M = |v_M| \pi a^2$ gekennzeichnet. Dann ist

$$P = 4Z_0 \frac{q^2}{\mathbf{I}^2}$$

Schalldruck außerhalb des Nahfeldes, entsprechend der Rechnung bei (1-18):

$$I = \frac{p_e^2}{Z_0} = \frac{P}{2\mathbf{p}^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{p_{eff}(r) = r_0 \frac{A_M \cdot \mathbf{w}}{2\mathbf{p} \cdot r} v_M} \quad (1-21)$$



2 Der Lautsprecher

Beim Lautsprecher wird der Schall durch eine schwingende Membran abgestrahlt. Die Membranauslenkung wird durch das elektrische Signal gesteuert.

Zur Umwandlung des elektrischen Signals in Membranschwingungen gibt es verschiedene Prinzipien, von denen das wichtigste (und am weitesten verbreiteste) das elektrodynamische Prinzip ist. Dabei wird die Kraftwirkung genutzt, die ein Magnetfeld auf bewegte Ladungen ausübt (Lorentz-Kraft).

Auf der Membran ist in diesem Fall eine Spule angebracht, die in das Feld eines Permanentmagneten taucht (Tauchspule). Wird die Spule vom Steuerwechselstrom durchflossen, so wird die Spule aufgrund der Lorentz-Kraft zu Schwingungen angeregt.

Die Abb.3 zeigt den Aufbau eines Konuslautsprecher -Treibers.

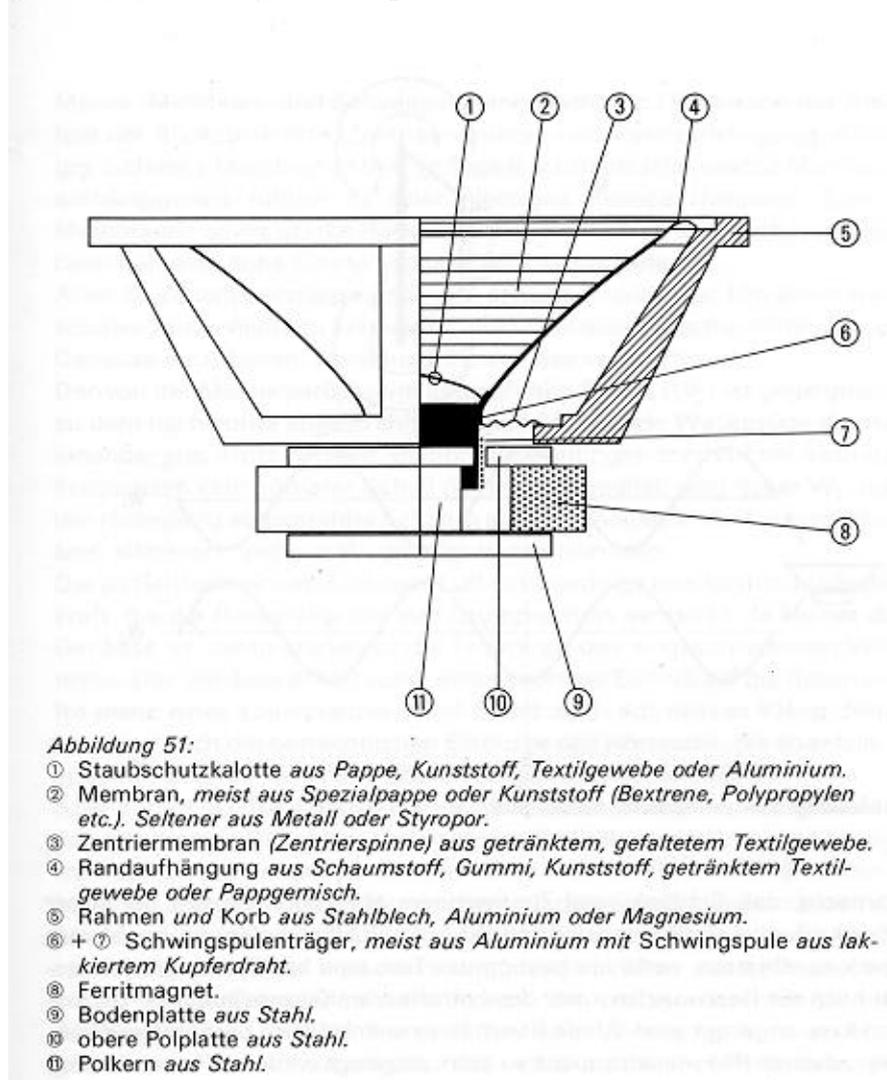


Abbildung 3: Aufbau eines Konuslautsprecher-Treibers [5]



In Abb. 4 ist das **elektrodynamische Wandlerprinzip** dargestellt. Der Antrieb der Membran erfolgt durch die Kraft, die durch das Magnetfeld auf den vom Steuerstrom durchflossenen Schwingspulen-draht ausgeübt wird (**Lorentz-Kraft**). Bei der Bewegung der Spule im Magnetfeld entsteht außerdem an den Enden der Spule eine induzierte Spannung, die der Steuerspannung entgegenwirkt und somit eine **Rückwirkung** darstellt.

Lorentz-Kraft:	$F = B l I$
Bewegungsinduktion \Leftrightarrow Rückwirkung :	$U_{\text{ind}} = B l v$

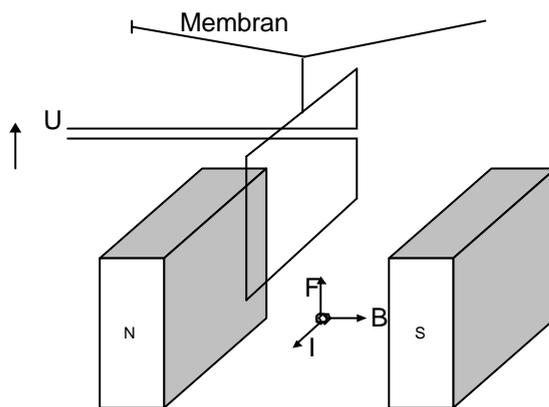


Abbildung 4: Elektrodynamisches Wandlerprinzip

Die an ihrem Rand elastisch eingespannte Membran ist zur Vermeidung des akustischen Kurzschlusses (Druck auf der Vorderseite der Membran kann sich mit dem gegenphasigen Druck auf der Rückseite der Membran ausgleichen) in ein Gehäuse eingebaut.

Da die Wellenlängen des Hörschalls zwischen 20 m (16 Hz) und 2 cm (16 000 Hz) liegen, ist der Membrandurchmesser im allgemeinen kleiner als die Wellenlängen des zu übertragenden Frequenzbereichs, so daß Kugelwellen abgestrahlt werden. Würde die vom Steuerstrom erzeugte Membranschnelle unabhängig von der Frequenz sein, so würde die abgestrahlte Leistung

$$P_{\text{ak}} = R_{\text{str}} v_M^2$$

wegen der Frequenzabhängigkeit des Strahlungswiderstandes mit abnehmender Frequenz abnehmen. Tatsächlich ist aber auch die Membranschnelle frequenzabhängig. Mit steigender Frequenz nimmt die Membranschnelle bis zur Resonanzfrequenz des mechanischen Systems zu und oberhalb der Resonanzfrequenz aufgrund des zunehmenden Einflusses der Massenträgheit wieder ab.

Die konstruktive Ausführung des Lautsprechers ist so gestaltet, daß das mechanische System tiefabgestimmt ist, d.h. die Resonanzfrequenz ist an das untere Ende des Übertragungsbereichs gelegt. Dadurch wird im Übertragungsbereich die Zunahme des Strahlungswiderstandes durch die Abnahme der Membranschnelle kompensiert! Unterhalb der Resonanzfrequenz nimmt sowohl die Membrangeschwindigkeit als auch der Strahlungswiderstand und demnach auch die abgestrahlte Leistung mit der



Frequenz ab. Dadurch ergibt sich für das Übertragungsverhalten des Lautsprechers eine Bandpaßcharakteristik.

Das untere Ende des **Übertragungsbereichs** wird demnach durch die Resonanzfrequenz des mechanischen Systems bestimmt, gegeben durch Masse (m) und Nachgiebigkeit (C = 1/Federkonstante) der Membranaufhängung

$$f_{res} = f_0 = \frac{1}{2p\sqrt{mC}} \quad (2-1)$$

Das obere Ende des Übertragungsbereich ergibt sich aus der Bedingung $ka < 2$:

$$ka = \frac{2paf_2}{c} = 2 \Rightarrow f < f_2 = \frac{c}{p \cdot a} \quad (2-2)$$

Das bedeutet einerseits **geringe Bündelung** (siehe Abb. 5) bei der Schallausbreitung und andererseits aber auch, daß die Membran nicht zu **Eigenschwingungen** (siehe Abb. 6) angeregt werden kann.

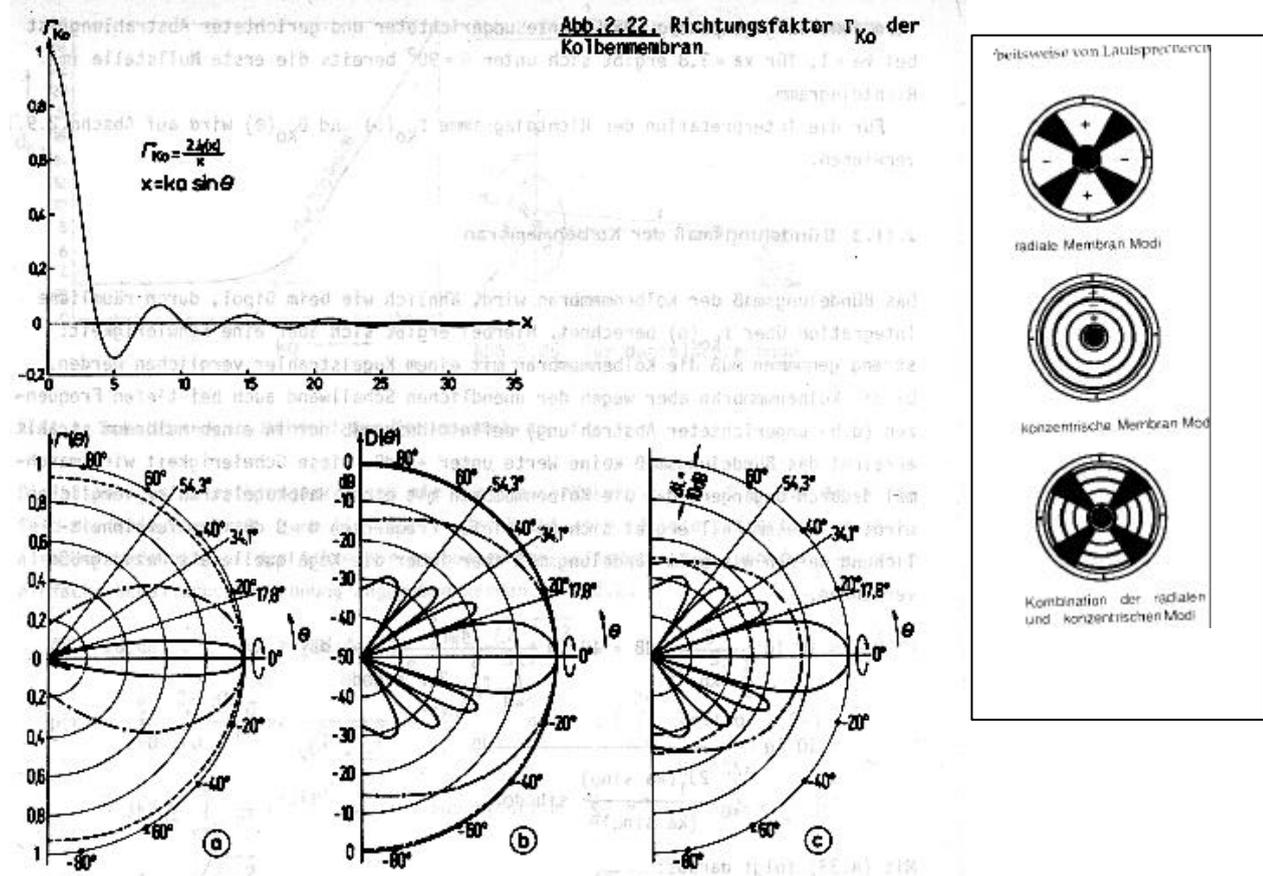


Abb.2.23a-c. Richtdiagramme der Kolbenmembran für die Parameter $ka = 4\pi$ (durchgezogen), $ka = \pi$ (strichpunktiert) und $ka = \pi/4$ (gestrichelt); Richtungsfaktor $\Gamma(\theta)$ (a), und Richtungsmaß $D(\theta)$ (b), sowie eine Darstellung des Richtungsmaßes, bei der als Bezugs-wert der Maximalwert (bei $\theta = 0^\circ$) für den Parameter $ka = 4\pi$ gewählt wurde (c)

Abbildung 5: Richtdiagramme der Kolbenmembran für die Parameter $ka = 4\pi$, $ka = \pi$ und $ka = \pi/4$ [1]

Abbildung 6: Schwingungsmoden einer kreisförmigen Membran [2]



Membran-Eigenschwingungen (Abb. 6) können angeregt werden wenn der Membrandurchmesser in die Größenordnung der Wellenlänge kommt. Sie können die Abstrahlung erheblich beeinflussen. Ist z.B. $\lambda \approx 2a$, so kann es zu einer Eigenschwingung kommen, bei der Teile der Membran gegenphasig schwingen, was zu einer schlechten Schallabstrahlung in Richtung der Membran-Achse, sowie zu Nebenmaxima in verschiedenen Richtungen führt.

Aufgrund dieser Begrenzungen hat der nutzbare Übertragungsbereich bei einem Einzellautsprecher eine Bandbreite von höchstens 2-4 Oktaven und ist somit nicht in der Lage das gesamte hörbare Spektrum mit etwa 10 Oktaven in der heute erwarteten Qualität wiederzugeben. Daher werden in HIFI Lautsprechersystemen immer mehrere Treiber (Chassis) eingesetzt, die auf die Wiedergabe eines bestimmten Frequenzbereichs spezialisiert sind. Üblich ist die Aufteilung des gesamten Spektrums in 2 bis 4 Bereiche. Man spricht von einer Lautsprecher-Kombination (Mehrwegbox), die oft aber auch lax wieder als Lautsprecher bezeichnet wird.

Die Aufteilung des Signals für die einzelnen Wege geschieht durch eine geeignete Kombination aus Tiefpaß-, Bandpaß- und Hochpaßfiltern. Meist erfolgt die Frequenzaufteilung erst nach dem Leistungsverstärker in einer passiven **Frequenzweiche**, bestehend aus Spulen und Kondensatoren (und gelegentlich auch Widerständen zur Anpassung der Leistung der einzelnen Treiber). Bei aufwendigeren Systemen im Studiobereich oder bei Lautsprecheranlagen hoher Leistung (PA-Bereich, engl. Public-Address) werden auch aktive Frequenzweichen eingesetzt, durch die allerdings die Signalauftrennung nur bei niedriger Signalleistung erfolgen kann. Dann wird für jeden Zweig ein eigener Endverstärker erforderlich.

In der Regel besteht bei Tief- und Mittelton-Treibern keine akustische Trennung zwischen Vorder- und Rückseite der Membran. Diese Lautsprecher müssen daher in ein **Gehäuse** eingebaut werden, das den akustischen Kurzschluß verhindert. Durch geeignete Gestaltung des Gehäuses läßt sich eine Verbesserung des akustischen Wirkungsgrades in bestimmten Übertragungsbereichen erzielen.

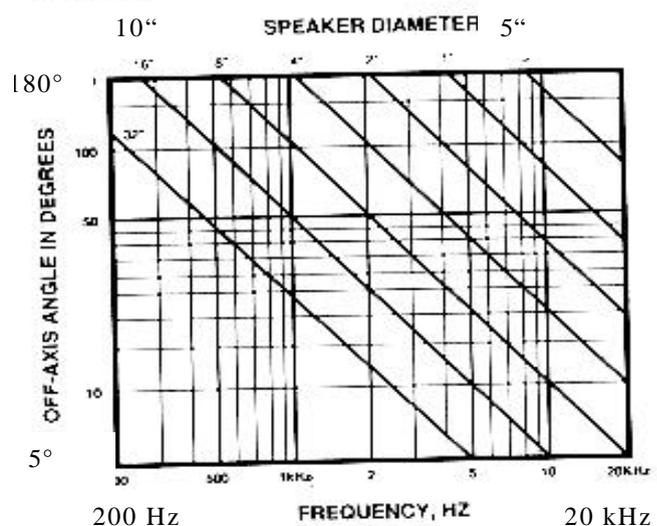
Man unterscheidet folgende Gehäuseformen:

- einfache Schallwände,
- geschlossene Gehäuse (closed box)
- Gehäuse mit zusätzlichem Resonator (Baßreflex, Passivstrahler),
- Schalleitungen (Transmission-Lines, Hörner)

Lautsprecher+Schallführung = **Lautsprecher-System**

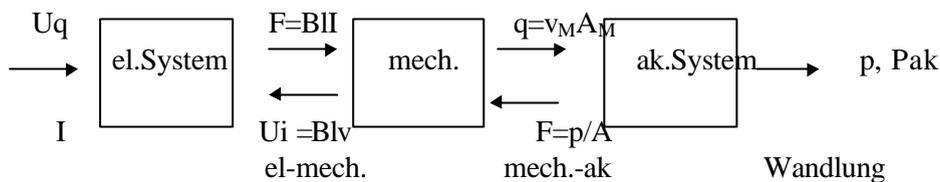
Abbildung 7 (rechts): Abstrahlwinkel für Chassis verschiedener Durchmesser [2]

Abstrahlwinkel \Rightarrow 3dB Abfall des Schalldrucks gegenüber dem in Achsrichtung. Parameter Membrandurchmesser: 10" ganz links bis 5" ganz rechts. Frequenzachse 200 Hz bis 20 kHz, Winkelangaben: 5°, 10°, 50°, 100°, 180°.



Um das theoretische Modell für den Lautsprecher nach Thiele-Small aufstellen zu können, empfiehlt es sich, das System (zunächst nur ein Lautsprecher mit Gehäuse) in drei miteinander gekoppelte Teilsysteme zu zerlegen:

- elektromechanisches Wandler-System
- mechanisches Schwingungssystem
- Abstrahlung



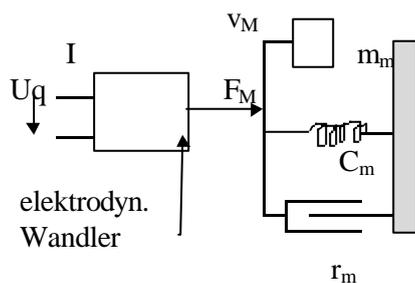
Das elektrische System besteht aus dem Endverstärker mit seinem Innenwiderstand und der Schwingspule mit ohmschem Widerstand R und Induktivität L . Das mechanische System besteht aus allen festen schwingungsfähigen Teilen (Membran mit Schwingspule). Das akustische System besteht aus der umgebenden Luft und der darin angeregten Schallstrahlung. Diese wird durch die Gestaltung des Abstrahlsystems beeinflusst (Membranart, Gehäuse, Trichter etc.). Bei der Kopplung zwischen elektrischem und mechanischem System über die Lorentz-Kraft entsteht durch die, bei der Bewegung der Spule hervorgerufene, induzierte Spannung eine Rückkopplung. Die Kopplung zwischen Membran und akustischen System erfolgt über den Schallfluß $q = v_M A_M$, der durch die Membranbewegung in unmittelbarer Nähe der Membran erzeugt wird. Die Rückwirkung der Schallwelle auf die Membran besteht in der Kraft, die durch den Schalldruck auf die Membran ausgeübt wird.

Man erkennt also, daß das mechanische Schwingungssystem sowohl auf elektrische Kräfte wie auch auf mechanische Kräfte, einschließlich der Rückwirkungen durch die Schallwellen, reagiert.

2.1 Mechanisches Schwingungssystem

Das mechanische Schwingungssystem läßt sich in der oben beschriebenen Weise durch Masse, Feder und Reibung kennzeichnen.

Ersatzschaltbild:



m_m , k_m und r_m sind Masse, Federkonstante und Reibungskoeffizient. Anstelle der Federkonstante wird häufig die Nachgiebigkeit $C_m = 1/k_m$ verwendet. F_M und v_M sind die auf die Membran wirkende Kraft und die daraus resultierende Membrangeschwindigkeit. $Z_m = F_M/v_M$ ist die mechanische Impedanz der Membran.

In dem Ersatzschaltbild sind die im realen System auf verschiedene Bereiche verteilten Größen Masse, Federkonstante und Reibung zu konzentrierten Bauelementen zusammengefaßt worden. Diese konzentrierten Bauelemente setzen sich aus einem rein mechanischen Teil, der von den festen Körpern herrührt und einem Teil, der von der Luft herrührt zusammen (akustischer Anteil). So setzt sich die



Masse aus der Masse der Membran mit der darauf angebrachten Schwingspule sowie der von der Membran beschleunigten Luftmasse (mitschwingende Luftmasse) zusammen. Diese ist allerdings i.a. gering im Vergleich zur Masse der mechanischen Komponenten. Die Nachgiebigkeit setzt sich zusammen aus einem Anteil, der von der Membranaufhängung herrührt und einem weiteren Anteil, der z.B. durch ein geschlossenes Gehäuse hervorgerufen wird. Die Reibungskraft rührt einerseits von der mechanischen Reibung her und andererseits von akustischen Vorgängen (z.B. einer zusätzlichen Luftströmung aufgrund von Lecks im Gehäuse).

Im folgenden kennzeichnen wir mechanische Parameter mit dem Index m. Mit einem zweiten Index wird im allgemeinen gekennzeichnet, ob es sich um den Lautsprecher mit oder ohne Gehäuse handelt. s = single = nicht eingebauter Treiber, c = closed box = in geschlossenes Gehäuse eingebauter Treiber. Bewegungsgleichung:

$$F_M = m_m \ddot{x} + k_m x + r_m \dot{x}$$

$$\underline{F}_M(t) = \underline{F}_M e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{F}_M = j\omega m_m \underline{v}_M + \frac{1}{j\omega C_m} \underline{v}_M + r_m \underline{v}_M \Rightarrow$$

$$\text{mechanische Impedanz der Membran: } \underline{Z}_m = \frac{\underline{F}_M}{\underline{v}_M} = j\omega m_m + \frac{1}{j\omega C_m} + r_m = r_m (1 + jQ_m \nu)$$

$$\text{mechanische Admittanz der Membran: } \underline{Y}_m = \frac{\underline{F}_M}{\underline{v}_M} = \frac{1}{j\omega m_m + \frac{1}{j\omega C_m} + r_m} = \frac{1}{r_m (1 + jQ_m \nu)}$$

mit den Parametern Resonanzfrequenz, Verstimmung ν und Güte

$$\omega_m = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m_m \cdot C_m}}, \nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, Q_m = \frac{1}{r_m} \sqrt{\frac{m_m}{C_m}}$$

Näherung

$$\underline{Y}_m \approx (C_m \omega)^2 \text{ für } \omega \ll \omega_0$$

$$\underline{Y}_m \approx (m_m \omega)^{-2} \text{ für } \omega \gg \omega_0$$

(2-3)

Berücksichtigung der an die Membran in Abstrahlungsrichtung (Membranvorderseite) angekoppelten Luft ergibt die mitschwingende Masse m_a und den Reibungswiderstand R_{Str} :

$$ka < 2$$

$$Z_{ko} = \frac{F}{\underline{v}} \approx A_M Z_0 \left[\frac{(ka)^2}{2} + j \frac{8}{3\pi} ka \right] = \frac{r_0 \rho a^4 \omega^2}{2c} + j \omega r_0 \frac{2}{\pi} \frac{4}{3} \rho a^3 = R_{Str} + j\omega m_a$$

$$R_{Str} = \frac{r_0 2\pi}{c} \rho^2 a^4 f^2 = 2,16 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{m}^4} A_M^2 f^2 \quad (2-4)$$

$$m_a = r_0 \frac{8}{3\pi^{1,5}} (\rho a^2)^{1,5} = 0,575 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} A_M \quad A_M = \rho a^2$$



Bei einem **geschlossenen Gehäuse** wirkt auf die Membranrückseite eine Kraft, die durch die bei Bewegung der Membran auftretenden Kompression und Dekompression der eingeschlossenen Luft entsteht.

Es sei V_B das Volumen des Gehäuses. Wird die Membran um dx ausgelenkt, so ergibt sich eine Volumenänderung um $dV=A_M dx$ und eine Kraft $dF=dp/A_M$. Der Zusammenhang zwischen dF und dx läßt sich aus der Adiabatangleichung ableiten:

$$pV^k = \text{const} \Rightarrow dp = -\frac{p_0 k}{V_B} dV \Rightarrow dF = -\frac{\mathbf{r}_0 c^2 A^2}{V_B} dx = \frac{1}{C_B} dx$$

also

$$C_B = \frac{V_B}{\mathbf{r}_0 c^2 A^2} \quad (2-5)$$

Die mechanische Gesamtnachgiebigkeit C_t setzt sich somit aus der rein mechanischen Nachgiebigkeit des nicht in ein Gehäuse eingebauten Treibers C_{ms} und der Nachgiebigkeit aufgrund der eingeschlossenen Luft C_B zusammen:

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_{ms}} + \frac{1}{C_B} \quad (2-6)$$

Um die mechanische Nachgiebigkeit der Membran einfacher mit der durch das Gehäuse verursachten vergleichen zu können wird oft anstelle von C_{ms} das sogenannte Äquivalentvolumen V_{as} verwendet

$$V_{as} = \mathbf{r}_0 c^2 A^2 C_{ms}$$

Damit ist dann

$$\frac{C_{ms}}{C_B} = \frac{V_{as}}{V_B}$$

Faßt man alle auf die Membran des Lautsprechers wirkenden Kräfte zusammen und dividiert durch die Membranschnelle, so ergibt sich die mechanische Impedanz der Membran zu

$$Z_m = \frac{F_M}{v_M} = j\omega(m_{md} + m_a) + \frac{1}{j\omega C_{ms}} + \frac{1}{j\omega C_B} + r_{ms} + R_{Str}$$

$$m_{ms} = m_{md} + m_a$$

Dabei ist m_{md} die mechanische Masse des Treibers und der darauf befindlichen Schwingspule.

Wird der **Treiber ohne Gehäuse** betrieben, so kann sich der Druck zwischen der Vorderseite und der Rückseite der Membran über den Rand hinweg ausgleichen. Das führt zum sog. akustischen Kurzschluß. In diesem Fall sind die Masse der mitschwingenden Luft und der Strahlungswiderstand sehr klein und können gegen die mechanische Masse und den Reibungswiderstand des Treibers vernachlässigt werden.

nichteingebauter Treiber: $m_{ms} \approx m_d$ und $R_{str} \ll r_{ms}$

Berücksichtigung der Bewegungsinduktion:

Bei der Bewegung der Spule im Magnetfeld wird eine Spannung induziert, die der äußeren Spannung (Quellenspannung des Generators U_q) entgegenwirkt und diese vermindert.

$$U_i = Bl v_M$$



Dies wirkt sich wie eine elektrische Reibung auf die Membran aus, wie die folgende Überlegung zeigt. Die elektrische Reibung ist meist sogar größer als die mechanische Reibung .

Im Übertragungsbereich sei der induktive Anteil des Spulenwiderstandes zu vernachlässigen $\omega L \ll R$.

Dann ist der Strom durch die Spule $I = U/R = (U_q - U_{ind})/R$ mit $U_{ind} = Bl v_M$

Die Kraft auf die Membran wird daher $F_M = Bl I = Bl (U_q - Bl v_M)/R$.

Teilt man durch v_M und führt den Reibungswiderstand $R_{es} = (Bl)^2/R$ sowie die der Steuerspannung proportionale mechanische Steuerkraft $F_q = Bl U_q/R$ ein, so schreibt sich diese Gleichung nach Umstellung $F_q = (Z_m + R_{es}) v_M = Z_{el,m} v_M$.

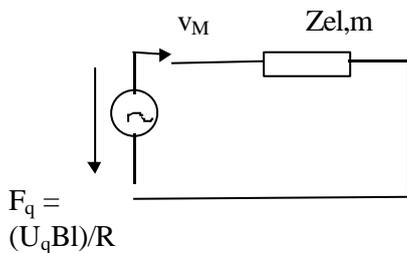
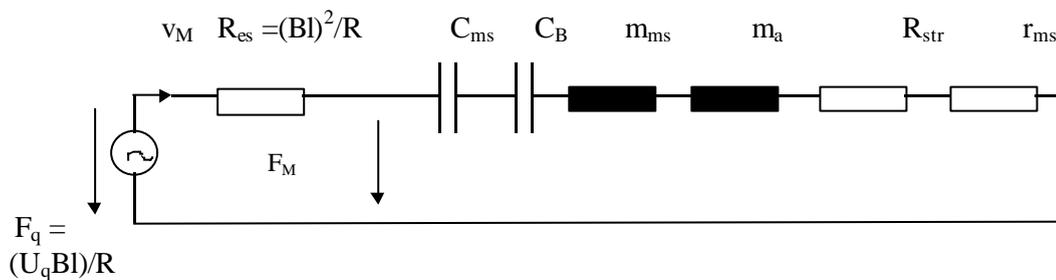
$Z_{el,m}$ stellt die elektromechanische Impedanz des Lautsprechers dar

$$F_q = Z_{el,m} v_M = (Z_m + R_{es}) v_M = \left[j\omega(m_{md} + m_a) + \frac{1}{j\omega C_{ms}} + \frac{1}{j\omega C_B} + r_{ms} + R_{Str} + R_{es} \right] v_M$$

Diese Impedanz kann wie eine elektrische Impedanz interpretiert werden.

Eine elektrische Schaltung, die diese Impedanz aufweist ist ein LRC-Serienschwingkreis, in dem für die Bauelementewerte die mechanischen Parameter des Lautsprechers eingesetzt werden.

Man nennt das dann das **mechanische Ersatzschaltbild** des Lautsprechers:



Es ist üblich für das mechanische System verschiedene Güten zu definieren, die im folgenden genannt seien:

Q_{ms} = mechanische Güte des freien (nicht in eine Gehäuse eingebauten) Treibers ($s = \text{single}$)

Q_{es} = elektrische Güte nicht eingebauten Treibers

Q_t = Gesamtgüte des nicht eingebauten Treibers

Q_{tc} = Gesamtgüte des in ein geschlossenes Gehäuse eingebauten Treibers ($c = \text{closed box}$)



Es gilt:

$$Q_{ms} = \frac{1}{r_{ms}} \sqrt{\frac{m_{md}}{C_{ms}}}, \quad Q_{es} = \frac{1}{R_{es}} \sqrt{\frac{m_{md}}{C_{ms}}}, \quad Q_{ts} = \frac{1}{r_{ms} + R_{es}} \sqrt{\frac{m_{md}}{C_{ms}}},$$

$$\frac{1}{Q_{ts}} = \frac{1}{Q_{ms}} + \frac{1}{Q_{es}}$$

$$Q_{tc} = \frac{1}{r_{mst} + R_{Str} + R_{es}} \sqrt{\frac{m_{ms}}{C_t}}$$



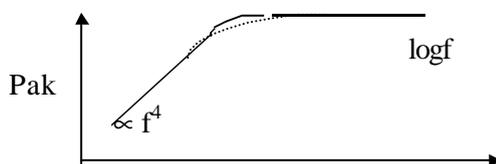
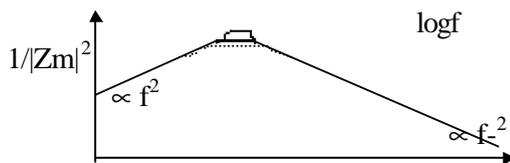
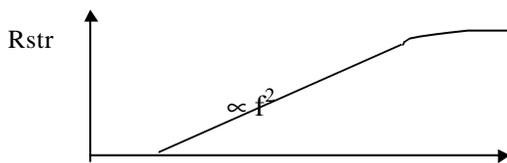
2.2 Näherungsformel für abgestrahlte Leistung

Die abgestrahlte Leistung läßt sich wie folgt berechnen:

$$P_{ak} = I A_M = \operatorname{Re}\{Z_{Ko}\} v_M^2$$

$$P_{ak} = R_{Str}(f) \cdot v_M^2(f) = R_{Str}(f) \cdot \left(\frac{|F|}{|Z_{el,m}(f)|} \right)^2 = R_{Str}(f) \cdot \left(\frac{Bl \cdot U_q}{|Z_{el}(f)| |Z_{el,m}(f)|} \right)^2$$

In den folgenden Abbildungen ist der Verlauf der Einflußfaktoren $R_{Str}(f)$, $|Z_{el}(f)|$ und $|Z_{el,m}(f)|$ jeweils als Funktion der Frequenz im doppelt logarithmischen Maßstab schematisch dargestellt. Die gepunktete Linie entspricht einer zu klein gewählten Systemgüte Q_{tc} .



$\log f$



Ohne Berücksichtigung der Rückwirkungen bei der mechanischen Impedanz der Membran (angekoppelte Luft, Bewegungsinduktion) ergeben sich Abschätzungsformeln.

Innerhalb des Übertragungsbereichs $f_0 < f < f_2$ gilt näherungsweise:

$$I = Uq/R$$

$$Z_{el} = R + j\omega L \approx R$$

$$\begin{aligned} R_{Str} &= Z_0 A_M \frac{(ka)^2}{2} = \frac{Z_0}{2} A_M \left(\frac{2\mathbf{p}l}{c} \right)^2 f^2 \\ A_M &= \mathbf{p}l^2 \\ v_M &= Y_{ms} F \approx (m_m \mathbf{w})^{-2} F \\ F &= Bl \cdot I \end{aligned} \quad (2-8)$$

⇒

$$\boxed{P_{ak} = \frac{r_0}{2c} \mathbf{p}l^4 \left(\frac{BlU_q}{m_m R} \right)^2 \quad P_{el} = \frac{U_q^2}{R} \quad \mathbf{h} = \frac{P_{ak}}{R_{el}} = \frac{r_0}{2c} \mathbf{p}l^4 \frac{(Bl)^2}{m_m^2 R}} \quad (2-9)$$

Man erkennt, daß die abgestrahlte Leistung sehr stark durch die Membranfläche beeinflussbar ist (mit der 4. Potenz des Membranradius zunimmt), umgekehrt proportional dem Quadrat der Membranmasse und des Nennwiderstandes ist, und proportional dem Quadrat der treibenden Spannung und dem Kraftfaktor, gebildet aus Kraftflußdichte mal Länge des Spulendrahtes, ist.

Der Referenzwirkungsgrad η wird häufig auch durch die in Datenblättern angegebenen Treiberparameter ausgedrückt. Die Umrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= K \frac{f_s^3 V_{as}}{Q_{es}} \\ \mathbf{h}_{0fc} &= K \frac{f_c^3 V_{as} V_B}{Q_{ec} (V_{as} + V_B)} \\ K &= \frac{4\mathbf{p}^2}{c^3} = 9,64 \cdot 10^{-7} \left(\frac{s}{m} \right)^3 \end{aligned} \quad (2-10)$$

Dabei ist η_0 der Referenzwirkungsgrad des in eine Schallwand eingebauten Treibers (ohne geschlossenes Gehäuse) und η_{0fc} der Referenzwirkungsgrad für den in ein geschlossenes Gehäuse eingebauten Treiber und f_s und f_c die entsprechenden Resonanzfrequenzen. Für die geschlossene Box ergibt sich eine geringfügige Verringerung des Wirkungsgrades.

Der Schallpegel in 1 m Entfernung bei einer elektrischen Eingangsleistung von 1 W ergibt sich dann zu

$$\text{SPL}(1 \text{ W}; 1 \text{ m}) = (112 + 10 \log \eta) \text{ dB} \quad (2-11)$$



2.3 Übertragungsfunktion

Im **unteren Übertragungsbereich** läßt sich der Schalldruck als Funktion der Frequenz aus Formel (1-21) in Verbindung mit (2-3) bis (2-7) ausrechnen. Die Abstrahlung erfolgt wegen des kleinen Gehäuses als Kugelwelle in den Vollraum. Da sich Formel (1-21) auf die Abstrahlung in einen Halbraum bezog ist der dortige Wert zu halbieren. Der Lautsprecher strahlt ja in den Vollraum ab.

$$\begin{aligned}
 |p| &= r_0 \frac{A_M \mathbf{w}}{\sqrt{22 \mathbf{p} R}} |v_M| = r_0 \frac{A_M \mathbf{w}}{\sqrt{22 \mathbf{p} R}} \left| \frac{F_M}{Z_{m,el}} \right| = r_0 \frac{A_M B U_q}{\sqrt{22 \mathbf{p} R}} \frac{\mathbf{w}}{\left| j \mathbf{w} m_t + \frac{1}{j \mathbf{w} C_t} + r_t \right|} \\
 &= r_0 \frac{A_M B U_q}{\sqrt{22 \mathbf{p} R}} \frac{\mathbf{w}}{r_t \left| 1 + j Q_{tc} \left(\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0} - \frac{\mathbf{w}_0}{\mathbf{w}} \right) \right|} = r_0 \frac{A_M B U_q}{\sqrt{22 \mathbf{p} R} m_t} \frac{Q_{tc} \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0}}{\left| 1 + j Q_{tc} \left(\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0} - \frac{\mathbf{w}_0}{\mathbf{w}} \right) \right|} \\
 &= r_0 \frac{A_M B U_q}{\sqrt{22 \mathbf{p} R} m_t} \left| H_{HP} \left(j \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0} \right) \right|
 \end{aligned}$$

Man erkennt, daß sich für die Übertragungsfunktion $H(j\omega) = p/U_q$ eine Hochpaß-Funktion 2. Ordnung ergibt, der durch geeignete Wahl des Gütefaktors eine spezielle Charakteristik verliehen werden kann. Üblich sind Bessel-, Butterworth-, Chebyshev- und Linkwitz-Charakteristik mit Güten Q_{tc} zwischen 0,5 etwa 1,2 ([2]). Dies soll im folgenden gezeigt werden.

Anwendung der Filtertheorie:

Überführen der Frequenzfunktion in die Übertragungsfunktion durch Fortsetzung in die ganze komplexe Bildebene (Bereich der Laplace-Funktion)

\underline{P} = auf Resonanzfrequenz der mechanischen Systems normierte Bildvariable = $(\sigma + j\omega)/\omega_0$

$$\underline{H}_{HP}(\underline{P}) = \frac{Q \underline{P}}{1 + Q \left(\underline{P} + \frac{1}{\underline{P}} \right)} \quad \text{Hochpaß} \rightarrow \text{Tiefpaß Transformation: } P \rightarrow \frac{1}{P} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{H}_{TP}(\underline{P}) = \frac{Q \frac{1}{\underline{P}}}{1 + Q \left(\underline{P} + \frac{1}{\underline{P}} \right)} = \frac{1}{P^2 + \frac{1}{Q} P + 1} = \frac{1}{P^2 + aP + 1}$$

Üblich sind Bessel-, Butterworth-, Chebyshev- und Linkwitz-Charakteristik mit Güten Q_{tc} zwischen 0,5 und etwa 1,2. Die Übertragungseigenschaften sind im folgenden mit Mathcad dargestellt worden.



$\omega := 0.3, 0.4 \dots 8$

Normierte Frequenz

$$j := \sqrt{-1}$$

$k := 1, 2 \dots 5$

$Q_k :=$

.5
.71
1
1.4
2

$$a_k := \frac{1}{Q_k}$$

a_k

2
1.408
1
0.714
0.5

Tschebyscheff mit 3 dB Welligkeit

Butterworth-Filter a $D = 3$ dB

Bessel-Filter

Übertragungsfunktion für den normierten Schalldruck:

$$H(k, \omega) := \frac{Q_k \cdot j \cdot \omega}{1 + Q_k \cdot j \cdot \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right)}$$

$$a(k, \omega) := 20 \cdot \log (|H(k, \omega)|)$$

$$\tau(k, \omega) := -\frac{d}{d\omega} \arg (H(k, \omega))$$

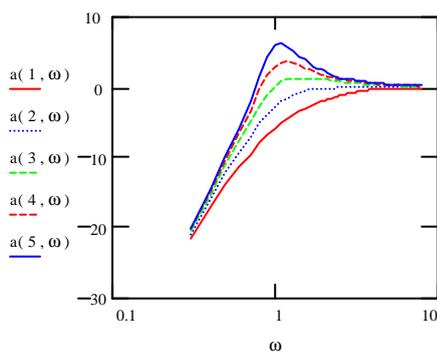


Abb. Betrag des Übertragungsfaktors für den Schalldruck in dB als Funktion der normierten Frequenz für Güten zwischen 0,5 und 2.

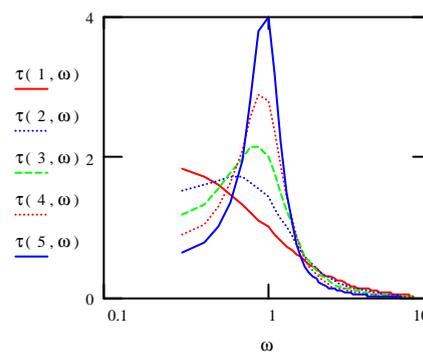


Abb.: normierte Gruppenlaufzeit für die Übertragungsfunktion als Funktion der normierte Frequenz für Güten zwischen 0,5 und 2.

Der Gütefaktor beeinflusst den Amplitudenverlauf der Übertragungskurve im unteren Übertragungsbereich (incl. der Steilheit des Abfalls unterhalb der Resonanzfrequenz) und auch das dynamische Verhalten (Einschwingverhalten) des Lautsprechers.

- $Q_{tc} = 0,5$: kritisch bedämpfte Abstimmung- dynamisch perfekt.
- $Q_{tc} = 1/\sqrt{3} = 0,577$: Bessel-Abstimmung (D2) - kein Überschwingen in der Sprungantwort.
- $Q_{tc} = 1/\sqrt{2} = 0,707$: Butterworth-Abstimmung (B2) - flacher Amplitudenverlauf mit minimaler unterer Grenzfrequenz
- $Q_{tc} > 1/\sqrt{2}$: Chebyshev-Abstimmung (elliptische-C2) mit Welligkeit im Amplitudenverlauf - maximale Belastbarkeit und maximaler Wirkungsgrad, etwas verschlechtertes Dynamikverhalten.

Die Gesamtgüte wird von dem Reibungskoeffizienten, der bewegten Masse und der Nachgiebigkeit bestimmt.

Bei einem geschlossenen Gehäuse wird die Nachgiebigkeit durch das Gehäusevolumen mitbestimmt. Siehe Formel (13):



$$Q_{tc} = \frac{1}{r_t} \sqrt{\frac{m_{ms}}{C_t}} = Q_{ts} \sqrt{\left(1 + \frac{V_{as}}{V_B}\right)}$$

Ein geschlossenes Gehäuse führt also zu einer Erhöhung der Güte des mechanischen Systems. Mit abnehmendem Gehäusevolumen nimmt die Güte zu. Nur für eine bestimmte Wahl des Gehäuse-Volumens wird ein geeigneter (kein Überspringen) Frequenzgang des Betrages des Übertragungsfaktors der Lautsprecherbox im Tieftonbereich erzielt.

Die 3-dB Grenzfrequenz, d.h. diejenige Frequenz bei der der Schallpegel um 3 dB unter den Wert des ebenen Verlaufs (in der theoretischen Kurve bei $f \rightarrow \infty$) abgefallen ist, errechnet sich aus :

$$f_3 = f_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{Q_{tc}^2 - 2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{Q_{tc}^2 - 2} \right)^2 + 4} \right]} \quad (2-12)$$

Weiter unterhalb der Grenzfrequenz fällt der Schalldruck mit $1/f^2$ oder 12 dB/Oktave ab.

Die durch den Gütefaktor charakterisierten Übertragungseigenschaften des Lautsprechers können mit der subjektiven Klangqualität in Zusammenhang gebracht werden.

Hohe Werte für Q_{tc} um 1,0 neigen zu einer warmen, kräftigen Wiedergabe, die von Audio-Werbefachleuten als „verkäuflich“ bezeichnet wird. Geringere Werte für Q_{tc} um 0,8 klingen detaillierter (teilweise aufgrund der verbesserten dynamischen Fähigkeiten) aber auch „dünn“.

Der Wert $Q_{tc} = 0,5$ wird üblicherweise als übertrieben straff und überdämpft angesehen. $Q_{tc} > 1,2$ sollte vermieden werden.

Eine von Small durchgeführte Untersuchung ergab 1969, daß die meisten der damals auf dem Markt befindlichen Lautsprecher (mit geschlossenem Gehäuse) folgendermaßen klassifiziert werden konnten:

1. Grenzfrequenz unter 50 Hz; Q_{tc} bis 1,1; Volumen größer als 40 l.
2. Grenzfrequenz über 50 Hz; Q_{tc} von 1,2-2,0 und Volumen unter 57 l.

Lautsprecher der ersten Kategorie zeigen gute Baßwiedergabe und eignen sich besonders für die Wiedergabe von Orchester und Orgelmusik, während Boxen der zweiten Kategorie wegen ihrer betonten Baßwiedergabe für elektronische Popmusik bevorzugt werden [2].

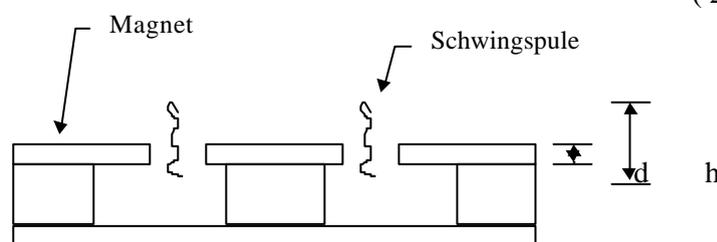
Akustische Leistung für maximale Membranauslenkung

Aus der obigen Formel läßt sich durch Umrechnung die maximale akustische Ausgangsleistung berechnen, die ein Lautsprecher bei noch vertretbaren Verzerrungspegeln innerhalb seines linearen Arbeitsbereiches erzeugen kann. Dieser Arbeitsbereich ergibt sich aus der maximalen Schwingspulen-auslenkung, die aus dem Überhang der Schwingspule über die Luftspalthöhe im Magnetfeld ermittelt werden kann (siehe Abbildung)

$$x_{max} = (h-d)/2 \quad (2-13)$$

h = Höhe der Schwingspule

d = Höhe des Luftspaltes



Etwas größere Auslenkungen sind indes erlaubt, wenn man bedenkt, daß das menschliche Gehör bei tiefen Frequenzen gegen Verzerrungen relativ unempfindlich ist.

Für die maximale Sinusleistung gilt:

$$P_{ar(cw)} = K_p f_3^4 V_d^2 \quad (2-14)$$

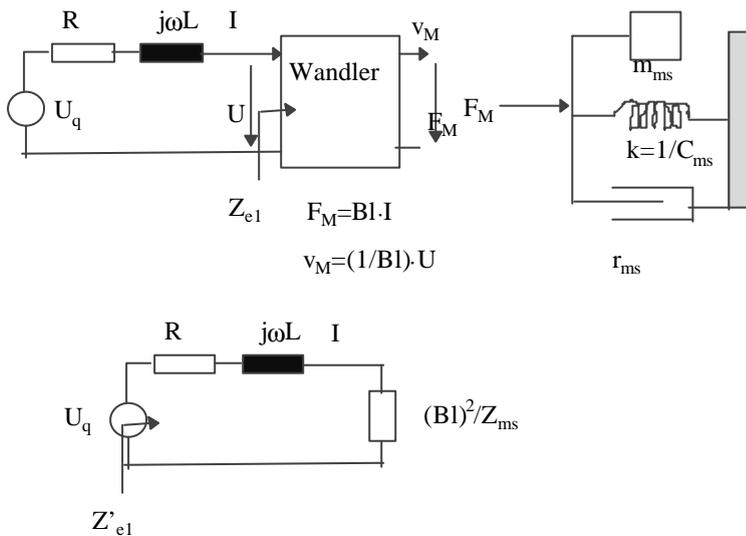
K_p ist eine Belastbarkeitskonstante, die mit Q_{tc} variiert (siehe nachfolgende Tabelle).

V_d ist das Luftvolumen, das die Membran bei maximaler Auslenkung verschieben kann = $A_M x_{max}$

Q_{tc}	K_p	Q_{tc}	K_p
0,50	0,06	1,000	0,84
0,577	0,15	1,100	0,85
0,707	0,39	1,200	0,84
0,800	0,57	1,500	0,71
0,900	0,75#		

2.4 Elektrische Eingangsimpedanz

Durch Messung der elektrischen Eingangsimpedanz Z_e des nicht eingebauten Treibers können die mechanischen und elektrischen Modell-Parameter (Thiele-Small-Parameter) bestimmt werden. Die Kenntnis dieser Parameter ist u.a. für die Entwicklung von Lautsprechern mit CAD-Programmen von Interesse.

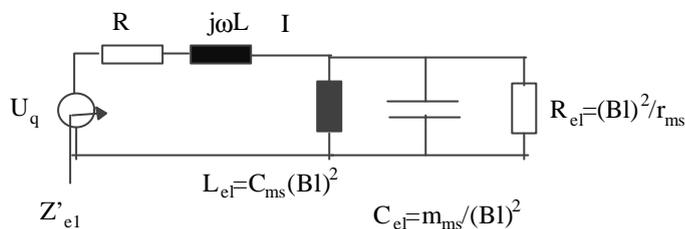


$$Z_{ms} = \frac{F_M}{v_M} = (Bl)^2 \frac{I}{U} \Rightarrow Z_{e1} = \frac{U}{I} = \frac{(Bl)^2}{Z_{ms}}$$

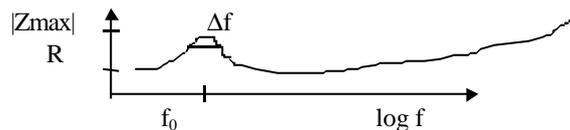
$$Z_{e1}' = R + j\omega L + Z_{e1} = R + j\omega L + \frac{(Bl)^2}{j\omega m_{ms} + r_{ms} + \frac{1}{j\omega C_{ms}}} = R + j\omega L + \frac{(Bl)^2}{r_{ms}(1 + jQ_{ms}\omega)}$$

$$Z_{e1}' = R + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{(Bl)^2} + \frac{1}{(Bl)^2} + \frac{1}{j\omega C_{ms}(Bl)^2}}$$

$$\frac{1}{j\omega m_{ms}} \quad r_{ms}$$



Zur Bestimmung der Parameter m_{ms} , C_{ms} und r_{ms} wird der Betrag der Impedanz für einige Frequenzen genau gemessen. Die Parameter werden dann so bestimmt, daß die mit dem Modell berechneten Impedanzwerte mit den gemessenen übereinstimmen.



Aus dem Betrag der Ortskurve werden die Werte R , f_0 , $Q = f_0/\Delta f$ und $|Z_{max}|$ bestimmt. Die Halbwertsbreite ergibt sich aus den 3-dB Punkten $|Z| = R + 0.7 (|Z_{max}| - R)$. Daraus ergeben sich 3 Gleichungen, für die 4 Unbekannten Parameter m_{ms} , C_{ms} , r_{ms} , und Bl .



$$|Z_{\min}| = R \quad (2-16)$$

$$|Z_{\max}| = |Z(f_0)| = R + \frac{(Bl)^2}{r_{ms}} \quad (2-17)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_{md}C_{ms}}} \quad (2-18)$$

$$Q_{ts} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{r_{ms}} \sqrt{\frac{m_{md}}{C_{ms}}} \quad (2-19)$$

Alternativ können die 3 dB Frequenzen auch aus den Impedanzwerten bei $Z_{-3\text{dB}} = R \sqrt{r_0}$ mit $r_0 = Z_{\max}/R$ berechnet werden. Dann ist

$$Q_{ms} = \frac{f_0}{\sqrt{r_0} \Delta f}$$

$$Q_{es} = \frac{Q_{ms}}{r_0 - 1}$$

$$Q_{ts} = \frac{Q_{ms} Q_{es}}{Q_{ms} + Q_{es}}$$

Um die Masse m_{ms} zu bestimmen wird eine weitere unabhängige Messung durchgeführt, bei der auf der Lautsprechermembran eine Zusatzmasse m_z (z.B. aus Plastilin) angebracht ist. Die sich dabei ergebende verschobene Resonanzfrequenz f_0' wird bestimmt. Man erhält dann m_{ms} aus (nachrechnen!):

$$m_{ms} = \frac{m_z}{\left(\frac{f_0'}{f_0}\right)^2 - 1} \quad (2-20)$$

In der Praxis erfordert die Bestimmung der Parameter große Genauigkeit. Die Frequenzen an den Meßpunkten sollten bis auf 0,1 Hz genau bestimmt werden.

Ein wesentlich genauere Bestimmung ermöglicht das computergestützte Meßsystem MLSSA, das für die Bestimmung der Thiele- Small-Parameter über ein curve-fit Programm verfügt. Dabei werden nicht nur die Meßwerte an 4 Frequenzpunkten ausgewertet, sondern die Parameter so bestimmt, daß die gemessenen komplexen Impedanzwerte für alle gemessenen Frequenzpunkte an die mit dem Modell berechnete Impedanzkurve optimal angepaßt werden.

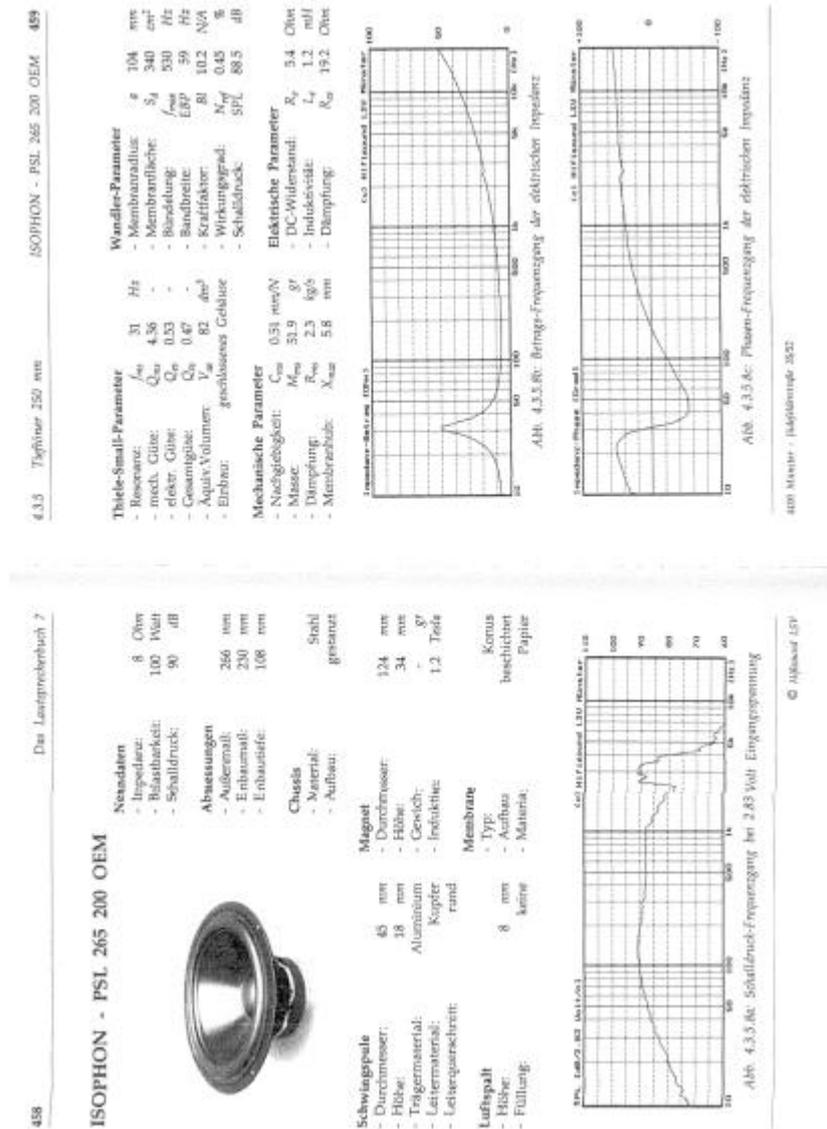


3 Beispiel

Lautsprecher-Treiber Isophon PSL 265 200 OEM entnommen aus [4]

Bei den angegebenen Parametern muß man zwischen den wesentlichen (meßtechnisch zu ermittelnden) und den daraus abzuleitenden (berechenbaren) Parametern unterscheiden.

Im folgenden wird für diesen Lautsprecher Treiber aus den mechanischen Daten der Übertragungsbereich, der Wirkungsgrad, der nominelle Schalldruck (1 Watt, 1m) die maximale Membranauslenkung, und das für die Konstruktion eines geschlossenen Gehäuses notwendige Gehäusevolumen berechnet.



Die Rechnungen wurden mit MathCad 6.0 durchgeführt worden.



Indizes: m = mechanisch, s = single (nicht eingebauter Treiber), t = total (gesamt), c = closed box (geschlossenes Gehäuse)

Konstanten:

$$c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad Z_0 = 410 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \quad p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{Luftdichte } \rho = 1.18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Variablen:

$$m_m = 51.9 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad C_{ms} = 0.51 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad r_{ms} = 2.3 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad a = 0.104 \text{ m} \quad Bl = 10.2 \frac{\text{N}}{\text{A}}$$

$$R = 5.4 \Omega \quad \text{Abstand: } r = 1 \cdot \text{m} \quad P_{el} = 1 \cdot \text{W}$$

untere Grenze des Übertragungsbereiches, näherungsweise für nichteingebauten Treiber:

$$f_{ms} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m_m \cdot C_{ms}}} \quad f_{ms} = 30.935 \cdot \text{Hz}$$

$$Q_{ms} = \frac{1}{r_{ms}} \cdot \sqrt{\frac{m_m}{C_{ms}}} \quad Q_{ms} = 4.386$$

$$\text{Bündelung für } f > f_2: \quad f_2 = \frac{c}{2 \cdot \pi \cdot a} \quad f_2 = 520.314 \cdot \text{Hz} = f_{max}$$

obere Grenze des Übertragungsbereiches wegen Partialschwingungen, näherungsweise für:

$$2 \cdot a < \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{f} < 4 \cdot a \quad \rightarrow \quad f < f_0 = \frac{c}{4 \cdot a} \quad f_0 = 817.308 \cdot \text{Hz}$$

$$\eta = \frac{Z_0 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a^2 \cdot Bl}{m_m} \right)^2}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{R} \quad \eta = 4.662 \cdot 10^{-3} = \eta_{el}$$

$$P_{ak} = \eta \cdot P_{el} \quad P_{ak} = 4.662 \cdot 10^{-3} \cdot \text{W}$$

Schalldruck in 1 m Entfernung bei $P_{el} = 1 \text{ W}$ und Abstrahlung in Halbraum

$$P_{ak} = \frac{p^2}{Z_0} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \quad p = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{P_{ak} \cdot Z_0}{2 \cdot \pi}} \quad p = 0.552 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$L_p = 20 \cdot \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad L_p = 88.811 \text{ dB} = \text{SPL}$$



Membranhub bei $P_{el} = 100 \text{ W}$ und $f = f_{ms}$ $P_{el} = 100 \cdot \text{W}$ $R_{max} = 50 \cdot \Omega$
 aus Frequenzgang $R_{max} = R(f_{ms})$

$$U = \sqrt{2 \cdot P_{el} \cdot R_{max}} \quad U = 100 \cdot \text{V}$$

$$Z_m = r_{ms} = \frac{F_M}{v_M} = \frac{B \cdot U}{v_M \cdot R_{max}}$$

$$v_M = \frac{B \cdot U}{r_{ms} \cdot R_{max}} \quad v_M = 8.87 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = v_M \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad x = \frac{1}{\omega} \cdot v_M \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad x_M = \frac{v_M}{2 \cdot \pi \cdot f_{ms}} \quad x_M = 45.632 \cdot \text{mm}$$

$$R_{es} = \frac{B^2}{R} \quad R_{es} = 19.267 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}} > r_{ms} = 2.3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

mechanische Gesamtgüte des nichteingebauten Treibers :

$$r_m = R_{es} + r_{ms} \quad Q_{ts} = \frac{1}{r_m} \sqrt{\frac{m_m}{C_{ms}}} \quad Q_{ts} = 0.468$$

mechanische Gesamtgüte des eingebauten Treibers :

$$Q_{tc} = \frac{1}{r_m} \sqrt{\frac{m}{C_{ges}}} = \frac{1}{r_m} \sqrt{m \cdot \left(\frac{1}{C_{ms}} + \frac{1}{C_B} \right)} = \frac{1}{r_m} \sqrt{\frac{m}{C_{ms}} \left(1 + \frac{C_{ms}}{C_B} \right)} = Q_{ts} \sqrt{1 + \alpha}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{C_{ms}}{C_B} = \frac{C_{ms} \cdot \rho \cdot c^2 \cdot A^2}{V_B} = \frac{V_{as}}{V_B}$$

$$A = \pi \cdot a^2 \quad V_{as} = C_{ms} \cdot \rho \cdot c^2 \cdot A^2 \quad V_{as} = 0.08 \cdot \text{m}^3$$

Volumen für geschlossenes Gehäuse so, daß sich Butterworth Charakteristik ergibt.
 Wegen Dämpfungsmaterial und Dämpfung durch Lecks im Gehäuse ist das der Fall für

$$Q_{tc} = 0.66 \quad \alpha = \left(\frac{Q_{tc}}{Q_{ts}} \right)^2 - 1 \quad \alpha = 0.991 \quad V_B = \frac{V_{as}}{\alpha} \quad V_B = 0.081 \cdot \text{m}^3$$

Durch die zusätzliche Federwirkung des Gehäuses erhöht sich die Resonanzfrequenz:

$$f_{tc} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m \cdot C_{ges}}} = f_{ms} \cdot \sqrt{1 + \alpha}$$

$$f_{tc} = f_{ms} \cdot \sqrt{1 + \alpha} \quad f_{tc} = 43.65 \cdot \text{Hz}$$

4 Literatur

- [1] Zwicker, Zollner: Elektroakustik, Springer (1987)
- [2] Dickason, Vance: Lautsprecherbau, Elektor (1991)
- [3] W. Mückenheim: Theorie der Schwingungen und Wellen, FHA-Skript, 1996
- [4] Gaedtke, Michael: Lautsprecherbuch, Hifisound, Münster (1992)
- [5] Stark, B.: Lautsprecherhandbuch; Pflaum-Verlag (1988)

