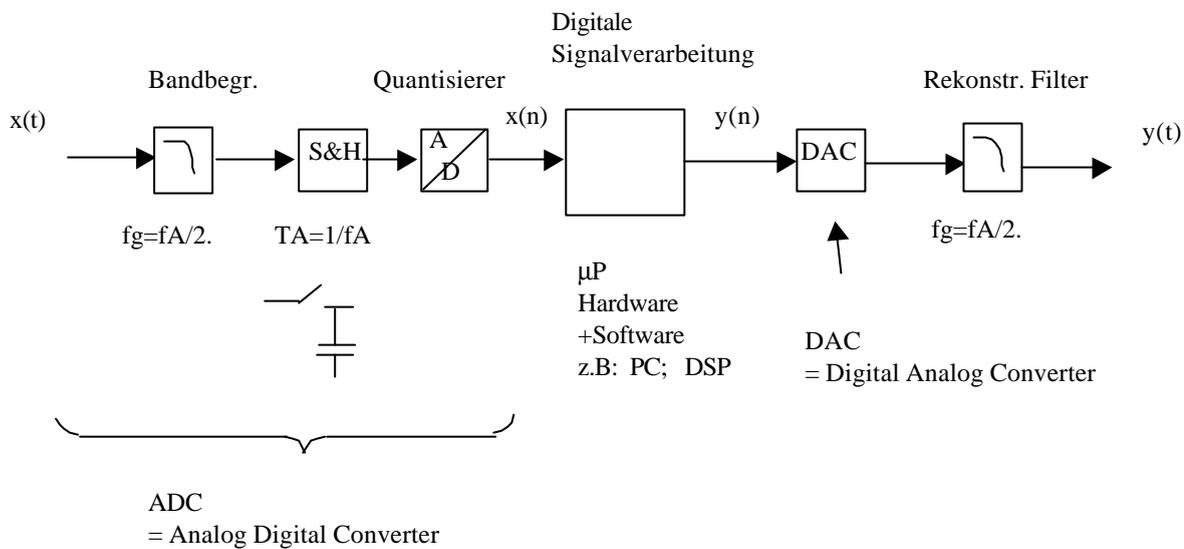


11.8 Digitale Filter

Als **wichtiges Beispiel für digitale Signalverarbeitung** sollen nun digitale Filter behandelt werden.

Das analoge Signal wird digitalisiert und auf digitaler Ebene von einem PC mit Software oder einem digitalen Signalprozessor weiter verarbeitet. Nach Rückwandlung des bearbeiteten Digitalsignals in ein analoges Signal ist das Signal gefiltert. Dieser Prozeß kann in Echtzeit oder nach Zwischenspeicherung eines Signalausschnitts in „Nicht-Echtzeit“ (lediglich von der Durchführung des Programms bestimmt) ablaufen.



Vorteile digitaler Filter

- Komplizierte Filtercharakteristiken lassen sich mit LSI Bausteinen bei niedrigen Kosten realisieren
- Keine Bauteile Drift
- Auch minimalphasige Filter möglich (keine oder geringe Laufzeitverzögerungen und Verzerrungen wie sie bei analogen Filtern unvermeidlich sind)
- Filterkurven können beim FIR-Filteralgorithmus (s.u.) direkt vorgegeben und modelliert werden

Spezifische Eigenheiten

- Quantisierungsfehler
- Rundungsfehler
- Rechenzeit

Man unterscheidet zwei **Typen**

- Rekursive Filter und

- Nichtrekursive Filter

Rekursive Filter werden auch IIR-Filter (Infinite Impulse Response) genannt. Der n-te diskrete Abtastwert des digital codierten Ausgangssignals, $y(n)$, wird in einem rekursiven Verfahren aus dem aktuellen, $x(n)$, und vorangegangenen Abtastwerten, $x(n-1)$, ..., sowie aus vorangegangenen Ausgangswerten, $y(n-1)$, ..., bestimmt.

$$y(n) = f\{x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, y(n-1), y(n-2), \dots\} \quad (11.8-1)$$

Der Signalflußplan enthält Rückkopplungen. Das Verfahren kann daher zu einem instabilen Ausgangssignal führen, worauf beim Filterentwurf zu achten ist.

Allerdings erfordern die rekursiven Verfahren erheblich geringeren Rechenaufwand als die nicht rekursiven Verfahren.

Nichtrekursive Filter werden auch FIR-Filter (Finite Impulse Response) genannt. Bei ihnen wird je eine Ausgangswert des Signals nur unter Verwendung von endlich vielen Eingangswerten (einem Signalabschnitt der Länge $T = NT_A$) berechnet:

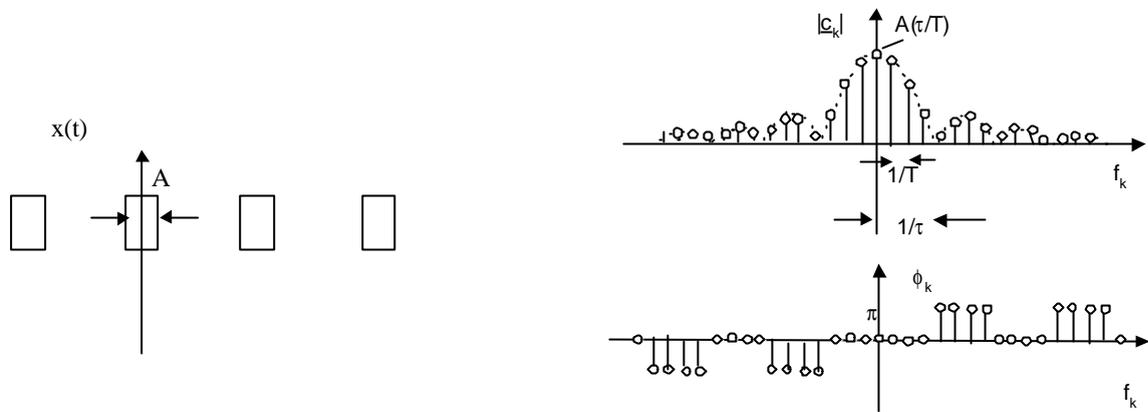
$$y(n) = f\{x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)\} \quad (11.8-2)$$

Während die Verfahren für rekursive digitale Filter die Entwurfsverfahren und Eigenschaften analoger Filter auf digitaler Ebene nachbilden, wird bei nichtrekursiven Filtern der direkte Weg gegangen, der darin besteht, das Ausgangssignal durch abschnittsweise Faltung des Eingangssignals mit der (endlichen) Impulsantwort des Filters zu berechnen.

Im folgenden werden wir die wichtigsten Hilfsmittel zusammenstellen, die den Übergang vom analogen zum diskreten Signal im Zeit- und Frequenzbereich ermöglichen .

11.8.1 Übergang vom analogen zum diskreten Signal

Periodische Zeitfunktion: diskretes Spektrum, Fourierreihe
 (oder periodische reelle Frequenzfunktion s.u.)

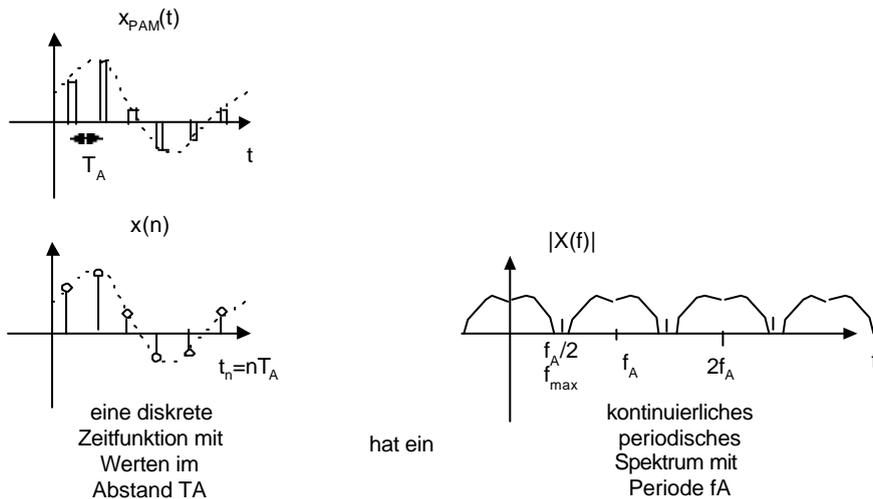


$$x(t) \xrightarrow{FTD} \{c_k\} \quad (11.8-3)$$

$$\xleftarrow{IFTD}$$

$$I.F.T.D. \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} \quad F.T.D. \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

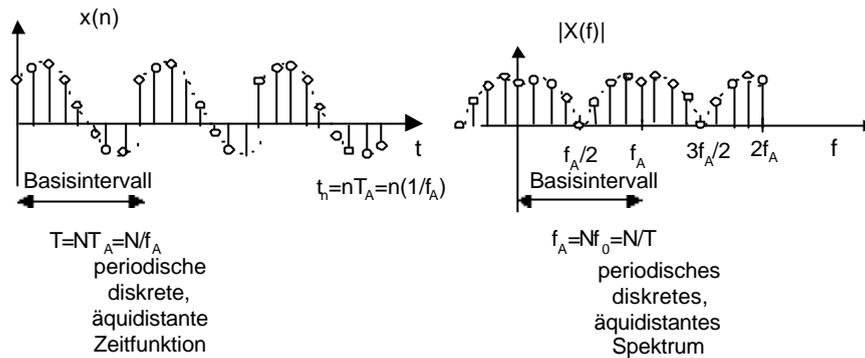
~~diskrete (abgetastete) Zeitfunktion:~~ periodisches Spektrum



$$x(t_n) = \frac{1}{f_A} \int_{-f_A/2}^{f_A/2} \underline{X}(f) e^{j2\pi \cdot f \cdot t_n} df \quad \underline{X}_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_n} \quad t_n = nT_A \quad (11.8-4)$$

Diskreter Signalabschnitt, diskreter Spektralabschnitt:

- Diskrete Fouriertransformation: N diskrete Zeitabstastwerte, N diskrete Frequenzabstastwerte
- Zur Berechnung der Spektralfunktion (des Spektrums, oder der Fouriertransformation) mit einem Digitalrechner.

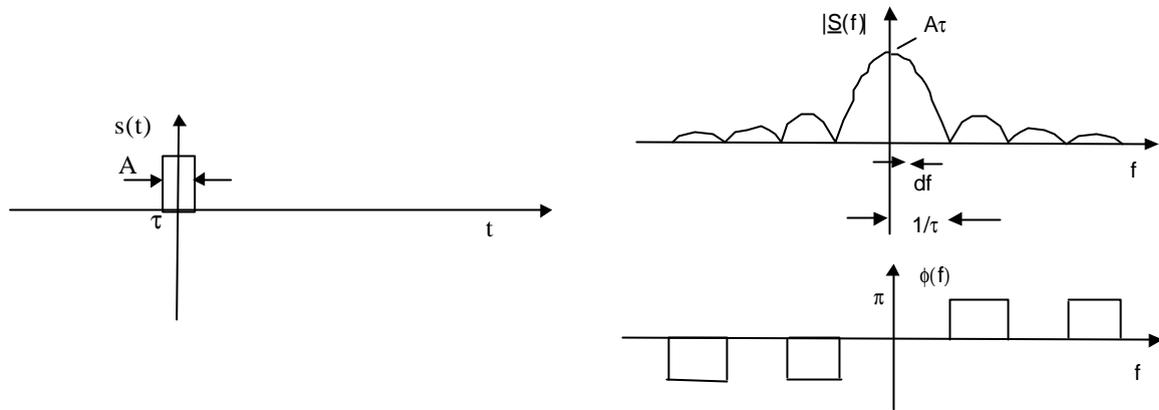


$$\{x(n)\}_{n=0,1,\dots,N-1} \xrightleftharpoons[D.F.T.]{I.D.F.T.} \{\underline{X}(k)\}_{k=0,1,\dots,N-1} \quad (11.8-5)$$

$$D.F.T. \quad \underline{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

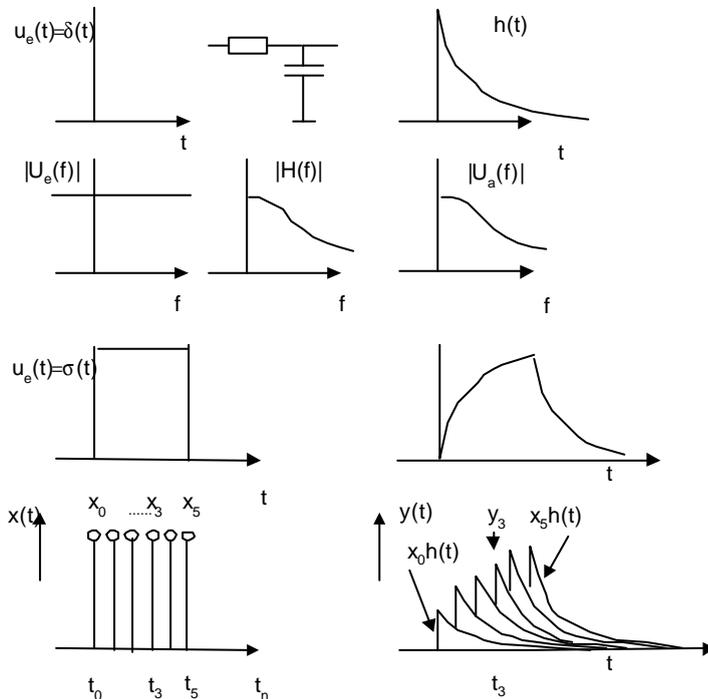
$$I.D.F.T. \quad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{X}(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

nichtperiodische Zeitfunktion endlicher Dauer (Energiesignal): Fouriertransformation



$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f) e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df = FT^{-1}\{\underline{S}(f)\} \quad \underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt = FT\{s(t)\} \quad (11.8-6)$$

Diskrete Faltung: Berechnung des diskreten Ausgangssignals für ein diskretes System aus dem diskreten Eingangs-Signalabschnitt und der (endlichen) diskreten Pulsantwort des Systems.



Das Eingangssignal wird durch die Diskretisierung in eine Folge von Abtastwerten (= Pulsen) zerlegt (PAM-Signal). Das Ausgangssignal berechnet sich aus der Überlagerung der Pulsantworten des Pulsmodulierten Eingangssignals.

Beispiel: diskreter Ausgangswert mit Nr.3

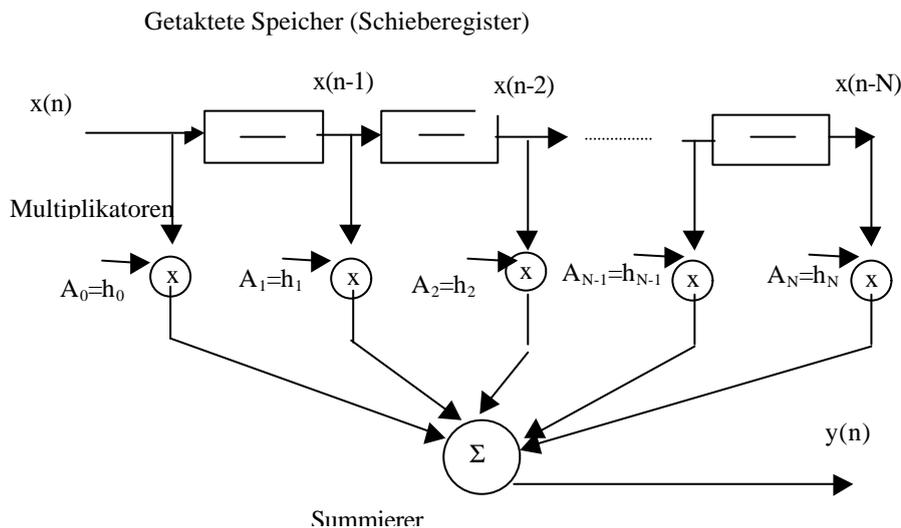
$$y_3 = x_3 h_0 + x_2 h_1 + x_1 h_2 + x_0 h_3 = \sum_{l=0}^3 x(3-l)h(l)$$

allgemeine Faltungssumme:

$$y(n) = \sum_l x(n-l)h(l) = \sum_i h(n-i)x(i) \quad (11.8-7)$$

11.8.2 FIR-Filter mit transversaler Filterstruktur

Eine System-Nachbildung des Algorithmus der diskreten Faltung wird durch das folgende Funktionsschaltbild gegeben. Dabei wird das diskrete Eingangssignal mit einem auf N Glieder beschränkten Abschnitt der Impulsantwort des Filters gefaltet.



Man nennt die A_i ($i = 0, 1, \dots, N$) die Koeffizienten des Filters. Setzt man $A_i = h(i)$, so bestimmt sich der Ausgangswert zum Zeitpunkt nT_A aus der Faltung eines Signalabschnitts mit der Länge NT_A mit der Pulsantwort der Länge NT_A :

$$\begin{aligned} y(n) &= A_0 x(n) + A_1 x(n-1) + \dots + A_N x(n-N) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N)x(n-N) = \sum_{i=0}^N h(i)x(n-i) \end{aligned}$$

Zur Entwicklung eines Filters muß durch Transformation vom Frequenz- in den Zeitbereich aus der Übertragungsfunktion (Dämpfungsfunktion) die Pulsantwort des Filters ermittelt werden. Anschließend muß die Pulsantwort durch Abschneiden (Fensterung) auf N-Glieder beschränkt werden und noch in geeigneter Weise zeitlich verschoben werden, so daß der Beginn der gefensterten Pulsantwort nach der Erregung kommt. Damit sind die Filterkoeffizienten bestimmt und

das Filter kann mit der oben angegebenen Struktur realisiert werden. Die Dämpfungsfunktion dieses Filters (mit der auf einen Zeitabschnitt der Länge $T = NT_A$ eingeschränkten Pulsantwort) weicht nun von der Ausgangs-Dämpfungsfunktion ab. Insbesondere ergeben sich im Übergangsbereich Abweichungen, sowie ein Überschwingen im Durchlaß- und Sperrbereich (Gibb'sches Phänomen). Durch Erhöhen der Koeffizientenzahl und gegebenenfalls Anwendung von gewichteten Fensterfunktionen läßt sich die Annäherung verbessern. Der Entwicklungsprozeß läuft daher interaktiv ab. Die Wahl des Signalabschnitts und die Koeffizientenzahl werden solange optimiert, bis der gefundene Dämpfungsverlauf mit dem Toleranzschema vereinbar ist.

Beispiel: Man entwickle ein digitales FIR TP –Filter mit $N = 33$ Koeffizienten für eine Abtastfrequenz von $f_A = 48$ kHz und $f_g = f_A/6 = 8$ kHz. Man berechne die Dämpfung des Filters bei 24 kHz.

Lösung:

Für kleine $N (<10)$ kann das Problem noch ohne großen Aufwand von Hand gelöst werden. In der Praxis erfordert das Toleranzschema allerdings eine höhere Koeffizientenzahl. Dann lassen sich die Rechnungen nur mehr unter Zuhilfenahme eines computerunterstützten Entwicklungsprogramms erledigen. Wir verwenden hier das Mathematikprogramm MathCad, um den in der Praxis üblichen interaktive Entwicklungsprozeß zu demonstrieren.

Zunächst zeigen wir jedoch noch einmal analytisch, wie sich die Pulsantwort eines idealen abgetasteten Tiefpasses berechnen läßt. (vgl. (9.8- 4)

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_g \\ 0 & |f_g| < |f| < |f_A / 2| \end{cases} \quad H(f + \frac{f_A}{2}) = H(f)$$

$$h_d(n) = c(nT_A) = \frac{1}{f_A} \int_{f_A - f_A/2}^{f_A/2} H(f) \exp(-j2\mathbf{p} \cdot f \cdot nT_A) df = \frac{1}{f_A} \int_{f_A - f_g}^{f_g} \exp(-j2\mathbf{p} \cdot \frac{f}{f_A} \cdot n) df$$

$$= -\frac{1}{jn \frac{2\mathbf{p}}{f_A} f_A} \exp(-j2\mathbf{p} \cdot \frac{f}{f_A} \cdot n) \Big|_{-f_g}^{f_g} = -\frac{1}{jn2\mathbf{p}} \left[\exp(-j2\mathbf{p} \cdot \frac{f_g}{f_A} \cdot n) - \exp(j2\mathbf{p} \cdot \frac{f_g}{f_A} \cdot n) \right]$$

$$h_d(n) = \frac{1}{3} \frac{\sin(\frac{n\mathbf{p}}{3})}{(\frac{n\mathbf{p}}{3})}$$

Als Fouriertransformierte der periodischen Kastenfunktion ergibt sich die diskrete $\sin(x)/x$ Funktion mit $x = n\pi/3$.

Nun führen wir die gesamte Rechnung mit MathCad durch. Dabei wird auf die obige Rechnung verzichtet und die Pulsantwort des idealen Tiefpasses über die Inverse Fouriertransformation ermittelt.

Entwicklung eines FIR-Tiefpasses mit $f_A = 48 \text{ kHz}$, $f_g = 8 \text{ kHz}$. Verwendung von $N = 33$ Koeffizienten und Rechteckfenster.

Wie groß ist die Dämpfung bei 24 kHz ?

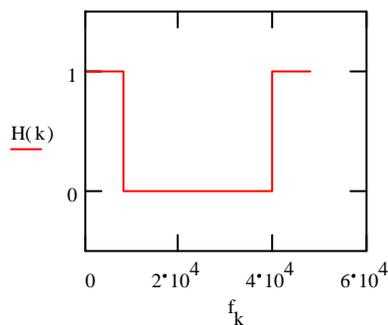
Berechnung der Pulsantwort für ein ideales, abgetastetes TP-Filter:

Abtastfrequenz 48 kHz , Frequenzauflösung 100 Hz

$$f_A := 48 \cdot 10^3 \cdot \text{Hz} \quad N1 := 480 \quad df := \frac{f_A}{N1} \quad df = 100 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k := 0.. N1 - 1 \quad H(k) := \text{wenn} \left\{ \frac{8}{48} \cdot N1 < k < \frac{40}{48} \cdot N1, 0, 1 \right\} \quad f_k := k \cdot df$$

Die Funktion wenn(bed.,x,y) gibt x oder y zurück, je nach Wert von bed. Wenn bed. wahr ist, übergibt die Funktion x, sonst y.



Damit die diskrete Fouriertransformierte von $H(k)$ berechnet werden kann, muß $H(k)$ in einen Vektor umgewandelt werden.

$$H_k := H(k)$$

$$h := \text{icsft}(H)$$

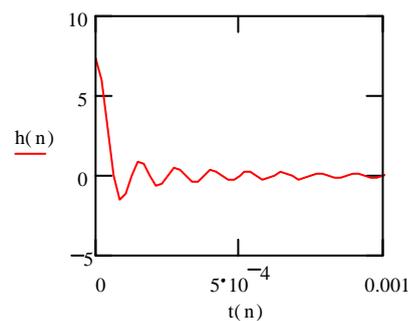
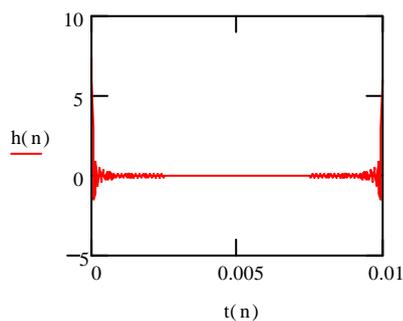
berechnet die inverse DFT von $H(k)$

$$n := 0.. N1 - 1$$

$$h(n) := h_n$$

$$dt := \frac{1}{f_A}$$

$$t(n) := n \cdot dt$$



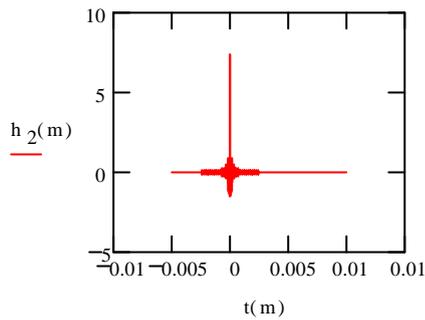
Umwandeln von $h(n)$ in symmetrische Funktion bzgl. Null

$$n := -\frac{N1}{2} - 1.. \frac{N1}{2} + 1$$

$$m := -\frac{N1}{2} - 1.. N1 + 2$$

$$h_1(n) := \text{wenn}(n < 0, h(|n|), h(n))$$

$$h_2(m) := \text{wenn} \left\{ m < \frac{N1}{2} + 2, h_1(m), 0 \right\}$$

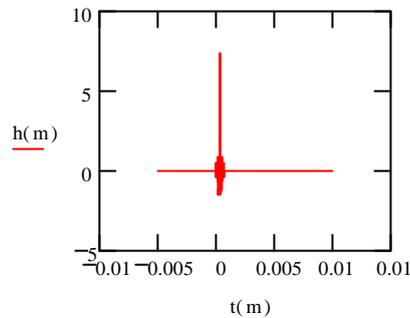
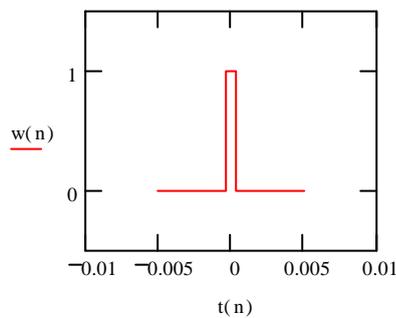


Beschränkung auf $N = 33$ Koeffizienten (Fensterung) und Verschieben um $16 = (N-1)/2$, so daß gefensterter Pulsantwort bei $t \geq 0$ anfängt:

$N := 33$

$$w(m) := \text{wenn} \left\{ -\frac{N+1}{2} < m < \frac{N+1}{2}, 1, 0 \right\}$$

$$h(m) := h_2 \left\{ m - \frac{N-1}{2} \right\} \cdot w \left\{ m - \frac{N-1}{2} \right\}$$

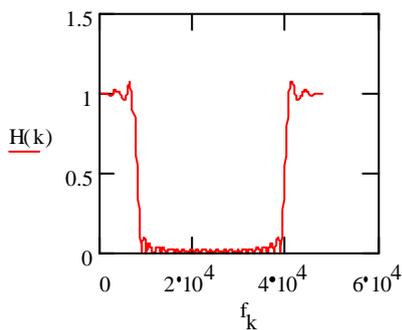


Fouriertransformation der Pulsantwort:

Die Funktion $\text{csft}(A)$ gibt die Diskrete Fouriertransformation (DFT) von dem Vektor A zurück.

$$m := 0..N1-1 \quad h_m := h(m) \quad H := \text{csft}(h) \quad k := 0, 1..N1-1$$

$$H(k) := |H_k| \quad a(k) := 20 \cdot \log(H(k))$$



$$f_s := 24 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$k_s := \frac{f_s}{f_A} \cdot N1$$

$$k_s = 240$$

$$a(k_s) = -16.545$$

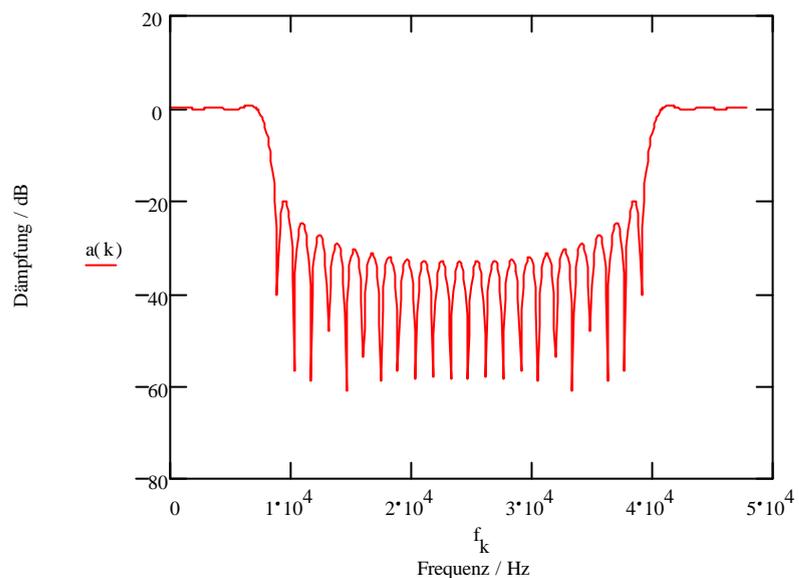
Dämpfungsverlauf (vergrößert) im Frequenzbereich von Null bis zur Abtastfrequenz

Filterkoeffizienten: $A_m = h(m)$ für $m = 0, \dots, N-1$

$m := 0.. N - 1$

h_m

-0.399
-0.046
0.407
0.486
0.046
-0.525
-0.626
-0.046
0.731
0.885
0.046
-1.185
-1.532
-0.046
2.997
6.062
7.349
6.062
2.997
-0.046
-1.532
-1.185
0.046
0.885
0.731
-0.046
-0.626
-0.525
0.046
0.486
0.407
-0.046
-0.399



FIR-Tiefpaßfilter, $N=33$, Rechteckfenster

Erhöht man die Koeffizientenzahl, so kann die Dämpfungszunahme im Übergangsbereich steiler gestaltet werden und die Sperrdämpfung erhöht werden. Zusätzlich kann durch geeignete Fensterfunktionen die Welligkeit im Sperrgebiet verringert werden und die Dämpfung dort ebenfalls erhöht werden (→ Übungsaufgabe).

Man erkennt, daß diese Methode die Möglichkeit eröffnet, Filter zu konstruieren, für die eine beliebige Übertragungsfunktion vorgegeben werden kann. So lassen sich nach dieser Methode auch Entzerrer realisieren. Dies wurde in Kap 2 schon beschrieben.