

Einfluß des Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit eines Rechteckträgers

Herleitung einer allgemeinen Beziehung mit Hilfe der 2-parametrischen Weibull-Verteilung

F. Colling

Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität Karlsruhe

Im ersten Teil dieser Veröffentlichungsreihe wird die Gleichung für die Weibull-Verteilung hergeleitet, sowie eine Methode zur näherungsweise Bestimmung ihrer Parameter angegeben. Außerdem wird mit Hilfe der 2-parametrischen Weibull-Verteilung eine allgemeine Beziehung für die Abhängigkeit der Festigkeit von der Spannungsverteilung und des beanspruchten Volumens für den Fall eines Trägers mit Rechteckquerschnitt konstanter Höhe unter einachsiger Biegung hergeleitet.

Influence of volume and stress distribution on the strength of a beam with rectangular cross section – Derivation of a general relationship with the help of a 2-parameter Weibull-distribution

In this part the equation of the (2-parameter) Weibull-distribution is derived and a method for the approximation of their parameters is shown. With the help of the 2-parameter Weibull-distribution a general relationship between the strength and the size of the volume and the stress distribution is derived for the case of a beam with rectangular cross section and constant depth subjected to single-axial bending.

1 Allgemeines

Zur Bestimmung der Festigkeitseigenschaften eines Materials wird eine mehr oder weniger große Zahl von Versuchen durchgeführt, bei denen – um mögliche Störeinflüsse zu vermeiden – die Versuchsanordnung und die Geometrie der Versuchskörper konstant gehalten werden. Trotzdem sind

die erreichten Festigkeitswerte z. T. erheblichen Schwankungen unterworfen, was auf die natürliche Streuung des Materials zurückzuführen ist. Die untersuchte Eigenschaft kann also nicht mit einem einzigen Wert angegeben werden, sondern die Versuche müssen statistisch ausgewertet werden.

Neben dem Mittelwert und der Standardabweichung ist hierbei auch die Verteilung der Versuchswerte von großer Bedeutung. Die Versuchsergebnisse werden in ein Häufigkeitsdiagramm eingetragen und mit Hilfe einer theoretischen Verteilung angenähert. Die dabei am häufigsten benutzte theoretische Verteilung ist die Gauß'sche Normalverteilung. In Bild 1 sind die Versuchsergebnisse von Zugversuchen an insgesamt 239 Keilzinkenverbindungen des Holzbaues (Ehlbeck et al. 1985) in Form eines Häufigkeitsdiagramms und einer Summenlinie dargestellt und mit der Gauß'schen Normalverteilung verglichen.

In jüngster Zeit findet speziell auf dem Gebiet des Ingenieurholzbau eine statistische Verteilung Anwendung, die es in vielen Fällen ermöglicht, die Versuchsergebnisse besser zu beschreiben und den Einfluß der Spannungsverteilung und des beanspruchten Volumens auf die Festigkeit abzuschätzen: die Weibull-Verteilung.

2 Die Weibull-Verteilung

Im Jahre 1939 entwickelte W. Weibull (1939) eine Theorie über das Festigkeitsverhalten von homogenen isotropen Werkstoffen, die ein sprödes Bruchverhalten aufweisen. Da

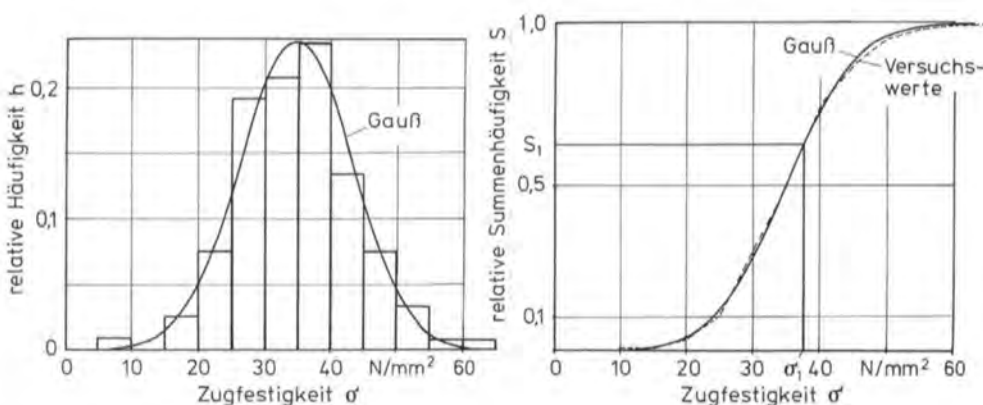


Bild 1. Häufigkeitsdiagramm und Summenlinie von 239 Keilzinkenzugversuchen. Vergleich der Versuchswerte mit der Gauß'schen Normalverteilung

Fig. 1. Histogram and cumulative frequency of 239 tensile tests of finger joints. Comparison between the test results and the Gauss-distribution

im Ingenieurholzbau bei Zug-, Querzug-, Schub- und auch bei Biegeversuchen mit Brettschichtholzträgern in Bauteilgröße Sprödbüche zu beobachten sind, erscheint die Anwendung der Weibull-Verteilung auch hier möglich. Diese soll nachstehend näher erläutert werden.

2.1 Herleitung der Weibull-Verteilung

Die in Bild 1 dargestellte Summenlinie zeigt, wie groß die Wahrscheinlichkeit S_1 ist, daß eine Keilzinkung bei einer bestimmten aufgetragenen Zugspannung σ_1 versagt. Die Überlebenswahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Keilzinkung nicht versagt, beträgt dann $1 - S_1$. Ein Zugkörper aus zwei hintereinanderliegenden Keilzinkenverbindungen besitzt bei gleicher Spannung σ_1 eine Überlebenswahrscheinlichkeit von:

$$1 - S_2 = (1 - S_1) \cdot (1 - S_1) = (1 - S_1)^2. \quad (1)$$

Bei einem Zugkörper, der aus N solcher „Einheitskörper“ zusammengesetzt ist, beträgt die Überlebenswahrscheinlichkeit nur noch:

$$1 - S_N = (1 - S_1)^N \quad (2)$$

bzw.

$$\ln(1 - S_N) = N \cdot \ln(1 - S_1). \quad (3)$$

Beim Zugstab mit gleichbleibendem Querschnitt ist die Anzahl der hintereinanderliegenden „Einheitskörper“ direkt proportional zum Volumen V , so daß gilt:

$$\ln(1 - S_N) = V \cdot \ln(1 - S_1). \quad (4)$$

Gleichung (4) gilt für eine beliebige Spannung σ_1 , so daß man allgemein schreiben kann:

$$\ln(1 - S) = V \cdot \ln(1 - S_E), \quad (5)$$

wobei S die Summenlinie für den Versuchskörper mit dem Volumen V und S_E die Summenlinie des „Einheitskörpers“ (mit $V=1$) ist.

$\ln(1 - S_E)$ ist ausschließlich eine Funktion der Spannung σ , und man kann schreiben:

$$\ln(1 - S_E) = -n(\sigma) \quad (6)$$

bzw.

$$\ln(1 - S) = -V \cdot n(\sigma) \quad (7)$$

Ist die Spannung nicht konstant über das Volumen verteilt, so gilt:

$$\ln(1 - S) = - \int_V n(\sigma) dV. \quad (8)$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Prüfkörpers mit beliebiger Spannungsverteilung ergibt sich somit zu:

$$1 - S = \exp \left[- \int_V n(\sigma) dV \right]. \quad (9)$$

Diese Beziehung wurde zwar für den Fall der Zugbeanspruchung hergeleitet, jedoch ist Gl. (9) die allgemeine Gleichung für die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Prüfkörpers unter beliebiger Beanspruchung.

Voraussetzung für Gl. (9) ist allerdings die Gültigkeit des Bruchmodells des schwächsten Gliedes (weakest link failure), welches bei spröden Materialien angewandt wird. Dieses Bruchmodell besagt, daß das Versagen des Versuchskörpers dann eintritt, wenn die Festigkeit des schwächsten Teiles erreicht ist. Das Versagen tritt plötzlich ein (Sprödbuch), eine mögliche Kraftumlagerung auf stärkere Nachbarteile

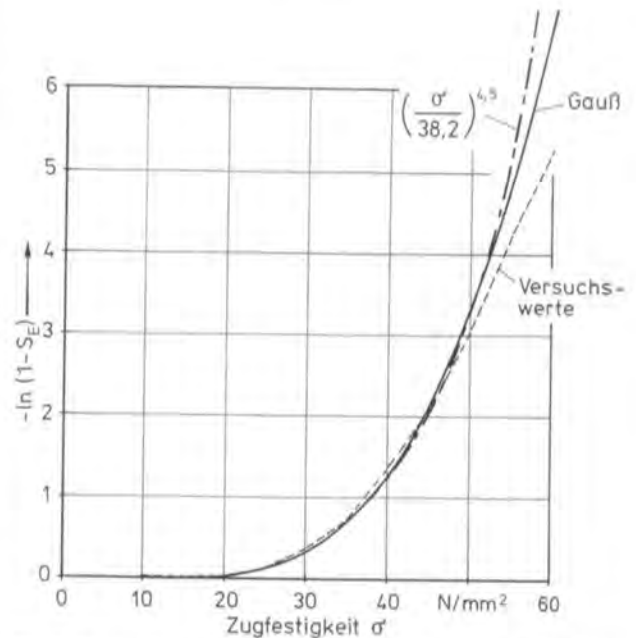


Bild 2. Vergleich zwischen den Versuchswerten, der Gauß'schen

Normalverteilung sowie der Funktion $\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$

Fig. 2. Comparison between the test results, the Gauss-distribution and the function $\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$

kann mit diesem Bruchmodell nicht berücksichtigt werden.

Wie in Bild 2 dargestellt, kann für Gl. (6) eine Näherungsfunktion der Form

$$-\ln(1 - S_E) = n(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m, \quad (10)$$

verwendet werden. Hierbei sind σ_0 und m zwei Konstanten, die anhand der Versuchswerte zu bestimmen sind. Mit Hilfe von Gl. (9) erhält man die Gleichung der 2-parametrischen Weibull-Verteilung:

$$1 - S = \exp \left[- \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV \right]. \quad (11)$$

Wie aus Gl. (11) ersichtlich ist, besteht für jede Spannung $\sigma > 0$ ein gewisses Versagensrisiko, denn nur für den Fall des unbelasteten Prüfkörpers ($\sigma = 0$) ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit S zu null.

Eine bestimmte Mindestfestigkeit σ_u kann mit der 2-parametrischen Weibull-Verteilung nicht berücksichtigt werden. Diese Möglichkeit besteht jedoch bei der 3-parametrischen Weibull-Verteilung, die folgende Form hat:

$$1 - S = \exp \left[- \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m dV \right]. \quad (12)$$

Der Wert für die Mindestfestigkeit σ_u muß – ebenso wie die Parameter σ_0 und m – anhand von Versuchsergebnissen ermittelt werden. Da aber die Bestimmung der Konstanten der 3-parametrischen Weibull-Verteilung sehr aufwendig ist (Pierce 1976), wird sie sehr selten benutzt, obwohl sie zur Beschreibung von Versuchsergebnissen besser geeignet ist als die 2-parametrische Weibull-Verteilung (siehe auch Abschnitt 2.3). Auch die Abschätzung des Einflusses des beanspruchten Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit erfolgt nur über die 2-parametrische Weibull-Verteilung, weil diese mathematisch weitaus einfacher zu handhaben ist.

2.2 Bestimmung des Integrals $\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV$

Bei einem Träger mit Rechteckquerschnitt kann man schreiben:

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = \int_{x=0}^L \int_{y=0}^H \int_{z=0}^B \left(\frac{\sigma(x, y, z)}{\sigma_0}\right)^m dz dy dx \quad (13)$$

Handelt es sich um einen Träger mit konstanter Breite, so gilt für den Fall der einachsigen Biegung (d.h. mit konstant über die Breite verteilter Spannung):

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = B \cdot \int_{x=0}^L \int_{y=0}^H \left(\frac{\sigma(x, y)}{\sigma_0}\right)^m dy dx \quad (14)$$

Bezieht man die Spannung $\sigma(x, y)$ auf die im Bereich der Trägerlänge L maximale Spannung σ_{max} , so gilt mit Hilfe von Bild 3:

$$\sigma(x, y) = \sigma_{max} \cdot f(x) \cdot f(y) \quad (15)$$

wobei $f(x)$ bzw. $f(y)$ die Verteilung der „bezogenen Spannung“ über die Trägerlänge (infolge der Belastung des Trägers) bzw. über die Trägerhöhe (infolge der Belastungsart, wie z.B. Schub- oder Biegebeanspruchung) darstellen. Für einen Träger mit Rechteckquerschnitt und konstanter Höhe sind $f(x)$ und $f(y)$ voneinander unabhängig, so daß sich Gl. (14) zu

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = B \cdot \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}\right)^m \cdot \int_{x=0}^L f^m(x) dx \cdot \int_{y=0}^H f^m(y) dy \quad (16)$$

ergibt.

Mit $\varepsilon = x/L$ und $\xi = y/H$ erhält man:

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = B \cdot \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}\right)^m \cdot L \cdot \int_{\varepsilon=0}^1 f^m(\varepsilon) d\varepsilon \cdot H \cdot \int_{\xi=0}^1 f^m(\xi) d\xi \quad (17)$$

Mit $\lambda_L^m = \int_{\varepsilon=0}^1 f^m(\varepsilon) d\varepsilon$ und $\lambda_H^m = \int_{\xi=0}^1 f^m(\xi) d\xi$ ergibt sich für Gl. (13):

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = B \cdot \lambda_L^m \cdot L \cdot \lambda_H^m \cdot H \cdot \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}\right)^m \quad (18)$$

bzw.

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = V \cdot \left(\lambda_L \cdot \lambda_H \cdot \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}\right)^m \quad (19)$$

Hierbei sind $V = B \cdot H \cdot L$ das beanspruchte Volumen sowie λ_L und λ_H sog. Völligkeitsbeiwerte, welche den Einfluß der Spannungsverteilung auf die Festigkeit erfassen.

Ist bei allen Versuchen einer Versuchsserie die gleiche Spannungsverteilung vorhanden, so sind λ_L und λ_H Konstanten, und man kann schreiben:

$$\sigma^* = \lambda_L \cdot \lambda_H \cdot \sigma_{max} \quad (20)$$

Somit ergibt sich Gl. (19) zu:

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV = V \cdot \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_0}\right)^m \quad (21)$$

Für die Gleichung der 2-parametrischen Weibull-Verteilung erhält man dann:

$$1 - S = \exp \left[-V \cdot \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_0}\right)^m \right] \quad (22)$$

Hierbei entspricht σ^* einer ideellen, über das gesamte Volumen V konstant verteilten Spannung, bei der der Versuchskörper die gleiche Versagenswahrscheinlichkeit besitzt, wie bei der maximalen Spannung σ_{max} und der Spannungsverteilung mit den Völligkeitsbeiwerten λ_L und λ_H .

2.3 Bestimmung der Parameter σ_0 und m der Weibull-Verteilung

Nach Pierce (1976) ergeben sich für den Mittelwert $\bar{\sigma}^*$, die Standardabweichung s_{σ^*} , den Variationskoeffizienten v und

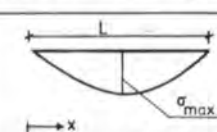
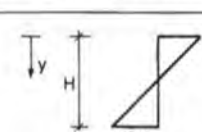
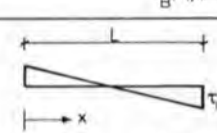
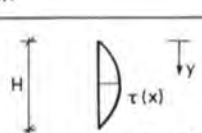
	Verteilung der Spannung über die Trägerlänge	Verteilung der Spannung über die Trägerhöhe
Biegespannung	 $\sigma_B(x) = \sigma_{max} \cdot 4 \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) = \sigma_{max} \cdot f(x)$	 $\sigma_B(y) = \sigma_B(x) \cdot \left(2 \frac{y}{H} - 1 \right) = \sigma_B(x) \cdot f(y)$
	$\sigma_B(x, y) = \sigma_{max} \cdot f(x) \cdot f(y)$	
Schubspannung	 $\tau(x) = \tau_{max} \cdot \left(1 - 2 \frac{x}{L} \right) = \tau_{max} \cdot f(x)$	 $\tau(y) = \tau(x) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right) = \tau(x) \cdot f(y)$
	$\tau(x, y) = \tau_{max} \cdot f(x) \cdot f(y)$	

Bild 3. Verteilung der bezogenen Biege- und Schubspannungen $\sigma_B(x, y)$ und $\tau(x, y)$
Fig. 3. Distribution of the related bending- and shear stresses $\sigma_B(x, y)$ and $\tau(x, y)$

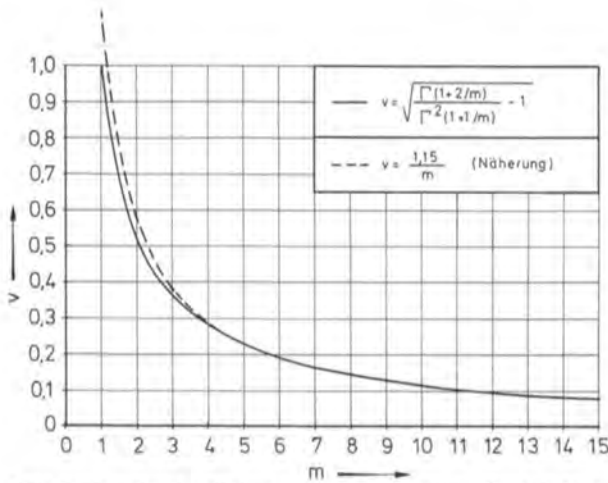


Bild 4. Variationskoeffizient v der 2-parametrischen Weibull-Verteilung in Abhängigkeit vom Exponenten m

Fig. 4. Relationship between the coefficient of variation v of the 2-parameter Weibull-distribution and the exponent m

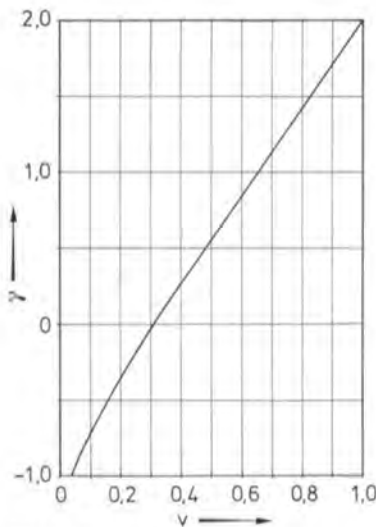


Bild 5. Schiefe γ in Abhängigkeit vom Variationskoeffizienten v der 2-parametrischen Weibull-Verteilung

Fig. 5. Relationship between the skewness γ and the coefficient of variation v of the 2-parameter Weibull-distribution

die Schiefe γ der 2-parametrischen Weibull-Verteilung folgende Gleichungen:

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\sigma_0}{V^{1/m}} \cdot \Gamma(1+1/m) \tag{23}$$

$$s_{\sigma^*} = \frac{\sigma_0}{V^{1/m}} \cdot \sqrt{\Gamma(1+2/m) - \Gamma^2(1+1/m)} \tag{24}$$

$$v = \frac{s_{\sigma^*}}{\bar{\sigma}^*} = \sqrt{\frac{\Gamma(1+2/m)}{\Gamma^2(1+1/m)} - 1} \tag{25}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma(1+3/m) - 3\Gamma(1+2/m) \cdot \Gamma(1+1/m) + 2\Gamma^3(1+1/m)}{[\Gamma(1+2/m) - \Gamma^2(1+1/m)]^{3/2}} \tag{26}$$

Hierbei ist $\Gamma(t)$ die sog. Gammafunktion¹.

Aus Gl. (25) ist ersichtlich, daß der Variationskoeffizient v nur vom Exponenten m der Verteilung abhängig ist. In Bild 4

1 $\Gamma(t) = (t-1)! = (t-1)$ Fakultät

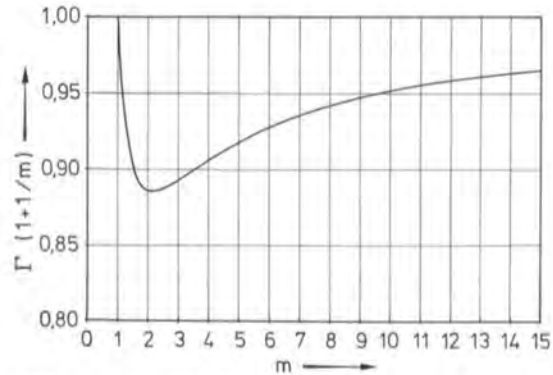


Bild 6. Funktion $\Gamma(1+1/m)$ in Abhängigkeit vom Exponenten m der 2-parametrischen Weibull-Verteilung

Fig. 6. Relationship between the function $\Gamma(1+1/m)$ and the exponent m of the 2-parameter Weibull-distribution

ist diese Abhängigkeit zusammen mit einer Näherungslösung dargestellt.

Aus Gl. (26) geht hervor, daß die Schiefe γ der Verteilung ebenfalls nur vom Exponenten m und somit nur vom Variationskoeffizienten v abhängig ist. Diese Abhängigkeit ist in Bild 5 dargestellt. Ein positiver Wert für die Schiefe γ bedeutet, daß die Verteilung einen verlängerten Arm nach $+\infty$ besitzt (rechtslastig), während eine Verteilung mit negativer Schiefe γ als linkslastig bezeichnet wird. Aus Bild 5 ist ersichtlich, daß erst ab einem Variationskoeffizienten von ungefähr $v \geq 0,30$ eine positive Schiefe γ vorhanden ist.

Da aber in vielen Fällen auch bei $v < 0,30$ eine positive Schiefe zu beobachten ist, deutet dies erneut darauf hin, daß die 2-parametrische Weibull-Verteilung weniger geeignet ist, Versuchsergebnisse zu beschreiben. In diesen Fällen wäre die 3-parametrische Weibull-Verteilung geeigneter, weil diese auch für $v < 0,30$ positive Schiefen ermöglicht.

Die Bestimmung des Parameters σ_0 erfolgt mit Hilfe von Gl. (23), wobei die Funktion $\Gamma(1+1/m)$ in Bild 6 dargestellt ist. Die Bestimmung der Parameter der Weibull-Verteilung mit Hilfe der Bilder 4–6 setzt voraus, daß eine unendlich große Zahl den Versuchen vorliegt. Ist nur eine begrenzte Anzahl von Versuchen vorhanden, so müssen die Parameter der Weibull-Verteilung bestmöglich an diese Versuchsergebnisse angepaßt werden, was jedoch einen größeren Rechenaufwand erfordert (Pierce 1976). Bei einer endlichen Zahl von Versuchen ist mit Hilfe der Bilder 4–6 nur eine erste, meist aber recht gute Näherung für die Parameter der Weibull-Verteilung möglich.

3 Einfluß des beanspruchten Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit

Für ein homogenes, isotropes und sprödes Material sind die Parameter σ_0 und m der Weibull-Verteilung Materialkonstanten, die für alle Beanspruchungsarten (Druck-, Zug-, Schub- und Biegebeanspruchung) den gleichen Wert besitzen. Für ein inhomogenes und anisotropes Material wie beim Werkstoff Holz ergeben sich für diese Parameter je nach Beanspruchungsart (z.B. Schub oder Biegung) und -richtung (z.B. Längszug oder Querkzug) unterschiedliche Werte. Für ein und dieselbe Beanspruchung können diese Parameter jedoch als konstant angesehen werden.

Für zwei Versuchsserien gilt mit Hilfe von Gl. (20) und Gl. (23):

$$\bar{\sigma}_1^* = \lambda_{L,1} \cdot \lambda_{H,1} \cdot \bar{\sigma}_{\max,1} = \frac{\sigma_0}{V_1^{1/m}} \cdot \Gamma(1+1/m) \tag{27}$$

bzw.

$$\bar{\sigma}_2^* = \lambda_{L,2} \cdot \lambda_{H,2} \cdot \bar{\sigma}_{\max,2} = \frac{\sigma_0}{V_2^{1/m}} \cdot \Gamma(1 + 1/m). \quad (28)$$

Somit ergibt sich für das Verhältnis der mittleren Festigkeiten zweier Versuchsserien folgende Beziehung:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\max,2}}{\bar{\sigma}_{\max,1}} = \frac{\lambda_{L,1}}{\lambda_{L,2}} \cdot \frac{\lambda_{H,1}}{\lambda_{H,2}} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/m}. \quad (29)$$

Gleichung (29) ist die allgemeine Gleichung für die Änderung der mittleren Festigkeit in Abhängigkeit von der Spannungsverteilung und des beanspruchten Volumens für einen Träger mit Rechteckquerschnitt konstanter Höhe unter einachsiger Biegung.

4 Zusammenfassung

Im vorliegenden Teil wurde die Gleichung für die (2-parametrische) Weibull-Verteilung hergeleitet und eine Möglichkeit zur näherungsweise Bestimmung der Parameter dieser Ver-

teilung angegeben. Außerdem wurde mit Hilfe der 2-parametrischen Weibull-Verteilung eine allgemeine Beziehung für die Abhängigkeit der Festigkeit von der Spannungsverteilung und des beanspruchten Volumens für den Fall eines Trägers mit Rechteckquerschnitt konstanter Höhe unter einachsiger Biegung gefunden.

Im zweiten Teil dieser Veröffentlichungsreihe werden die Volligkeitsbeiwerte λ_L und λ_H für die gebräuchlichsten Spannungsverteilungen in Form von Diagrammen angegeben und die Anwendung dieser Diagramme anhand einiger Beispiele gezeigt.

5 Literatur

- Ehlbeck, J.; Colling, F.; Görlacher, R. 1985: Einfluß keilgezinkter Lamellen auf die Biegefestigkeit von Brettschichtholzträgern. Teil 2: Eingangsdaten für das Rechenmodell. Holz Roh-Werkstoff 43:369–373
- Pierce, C.B. 1976: The Weibull distribution and the determination of its parameters for application to timber strength data. Building Research Establishment, Princes Risborough Laboratory. Current Paper CP 26/76
- Weibull, W. 1939: A statistical theory of the strength of materials. Ing. Vetensk. Akad. Handl. No. 151

Einfluß des Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit eines Rechteckträgers

Bestimmung der Völligkeitsbeiwerte, Anwendungsbeispiele

F. Colling*

Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität Karlsruhe

Im zweiten, abschließenden Teil, werden Möglichkeiten zur Bestimmung der Völligkeitsbeiwerte aufgezeigt. Mit Hilfe von Beispielen wird gezeigt, daß nicht nur die Größe des beanspruchten Volumens einen Einfluß auf die Festigkeit eines Materials ausübt, sondern daß auch die Spannungsverteilung über dieses Volumen von großer Bedeutung ist.

Influence of the volume and the stress distribution on the strength of a beam with rectangular cross section

Determination of the fullness-parameters, examples

In this part, possibilities for the determination of the fullness-parameters are given. With the help of some examples it is shown, that the strength of a material is not only determined by the size of the stressed volume, but also by the stress distribution over this volume.

1 Allgemeines

Im ersten Teil (Colling 1986) wurde auf der Grundlage eines homogenen isotropen Werkstoffes mit sprödem Bruchverhalten die Weibull-Verteilung hergeleitet. Mit Hilfe der 2-parametrischen Weibull-Verteilung wurde folgende Beziehung gefunden, welche die Abhängigkeit der Festigkeit von der Spannungsverteilung und des beanspruchten Volumens ausdrückt:

$$\frac{\bar{\sigma}_{max,2}}{\bar{\sigma}_{max,1}} = \frac{\lambda_{L,1}}{\lambda_{L,2}} \cdot \frac{\lambda_{H,1}}{\lambda_{H,2}} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/m} \quad (1)$$

Hierbei bezeichnen $\bar{\sigma}_{max,1}$ bzw. $\bar{\sigma}_{max,2}$ die mittleren Festigkeiten von zwei Versuchsserien, λ_L bzw. λ_H die sog. Völligkeitsbeiwerte, die den Einfluß der Spannungsverteilung erfassen, V_1 bzw. V_2 die beanspruchten Volumina der jeweiligen Versuchskörper und m den Exponenten der Weibull-Verteilung. Gl.(1) gilt dabei für den Fall eines Trägers mit Rechteckquerschnitt (konstanter Höhe und Breite) unter einachsiger Biegung.

* Dipl.-Ing. F. Colling ist wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Abteilung Ingenieurholzbau, der Universität Karlsruhe

2 Bestimmung der Völligkeitsbeiwerte λ_L und λ_H

Für die Völligkeitsbeiwerte λ_L und λ_H wurden folgende Beziehungen gefunden:

$$\lambda_L = \left[\int_0^1 f^m(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{1/m} \quad (2)$$

$$\lambda_H = \left[\int_0^1 f^m(\xi) d\xi \right]^{1/m} \quad (3)$$

wobei $f(\varepsilon)$ und $f(\xi)$ die Verteilung der auf die maximal vorhandene Spannung σ_{max} bezogene Spannung über die Länge L bzw. die Höhe H des Trägers darstellen.

$\varepsilon (= x/L)$ und $\xi (= y/H)$ sind dimensionslose Faktoren, so daß Gl. (2) und Gl. (3) identisch sind: in beiden Fällen wird das Integral über eine Spannungsverteilung gesucht, von der nur die Form von Bedeutung ist. Bei gleicher Spannungsverteilung nehmen λ_L und λ_H den gleichen Wert an, so daß man schreiben kann:

$$\lambda = \left[\int_0^1 f^m(\eta) d\eta \right]^{1/m} \quad (4)$$

Die Lösung des Integrals aus Gl. (4) ist in Bild 1 für die einfachsten Spannungsverteilungen angegeben. Hierbei kann im Fall der parabelförmigen Spannungsverteilung nur eine Näherungslösung für λ angegeben werden, weil das Integral nicht mehr allgemein für ein beliebiges m berechnet werden kann (die Berechnung erfolgt auf numerischem Wege mit einem vorgegebenen Wert für m).

Für eine parabelförmige Spannungsverteilung mit beliebigen Randspannungen ergibt sich mit Hilfe von Bild 2

$$\sigma(\eta) = \sigma_{li} + (\sigma_{re} - \sigma_{li}) \cdot \eta + 4 \cdot \sigma_0 \cdot (\eta - \eta^2) \quad (5)$$

Die Stelle, an der die parabelförmige Spannungsverteilung eine horizontale Tangente besitzt, ergibt sich aus der

Bedingung $\frac{d\sigma}{d\eta} \stackrel{!}{=} 0$ zu:

$$\eta_{max} = \frac{\sigma_{re} - \sigma_{li} + 4 \cdot \sigma_0}{8 \cdot \sigma_0} \quad (6)$$

Liegt η_{max} innerhalb des betrachteten Bereiches ($0 < \eta < 1$), so erhält man für die im Feldbereich maximal auftretende Spannung $\sigma_{max,F}$:

$$\sigma_{max,F} = \sigma_{li} + 4 \cdot \sigma_0 \cdot \eta_{max}^2 \quad (7)$$

Da bei der Herleitung von Gl. (1) von der größten vorhandenen Spannung ausgegangen wurde, muß noch

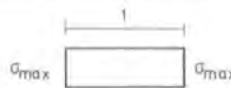



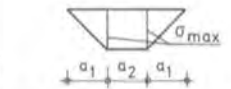

	Spannungsverteilung	$\lambda = \left[\int_0^1 f^m(\eta) d\eta \right]^{1/m}$
①		1,0
②		$(\frac{1}{m+1})^{1/m}$
③		$(\frac{1}{m+1} \cdot \frac{1-k^{m+1}}{1-k})^{1/m}$
④		$(\frac{1}{m+1} \cdot \frac{1+ k ^{m+1}}{1+ k })^{1/m}$
⑤		$[\frac{1}{m+1} (1+a_2 \cdot m)]^{1/m}$
⑥		$[\frac{1}{m+1} (1+0,345 m - 0,027 \cdot m^2 + 0,0013 \cdot m^3)]^{1/m}$

Bild 1. Völligkeitsbeiwert λ in Abhängigkeit vom Exponenten m der 2-parametrischen Weibull-Verteilung für verschiedene Spannungsverteilungen
Fig. 1. Relationship between the fullness-parameter λ and the exponent m of the Weibull-distribution for several stress-distributions

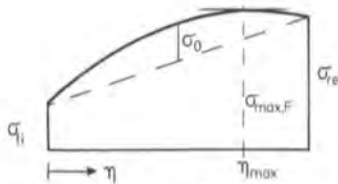


Bild 2. Parabelförmige Spannungsverteilung mit beliebigen Randspannungen
Fig. 2. Parabolic stress-distribution

überprüft werden, ob $\sigma_{max,F}$ tatsächlich die betragsmäßig größte Spannung ist. Ist $\sigma_{max,F}$ größer als die beiden Randspannungen σ_{II} und σ_{re} , so ergibt sich für Gl. (5):

$$\sigma(\eta) = \sigma_{max,F} \cdot \left[\frac{\sigma_{II}}{\sigma_{max,F}} + \left(\frac{\sigma_{re} - \sigma_{II}}{\sigma_{max,F}} \right) \cdot \eta + \frac{1 - \frac{\sigma_{II}}{\sigma_{max,F}}}{\eta_{max}^2} (\eta - \eta^2) \right] \quad (8)$$

bzw.

$$\sigma(\eta) = \sigma_{max,F} \cdot f_1(\eta) = \sigma_{max} \cdot f_1(\eta) \quad (9)$$

Für den Fall, daß die größte Spannung im Feld auftritt, berechnet sich der Völligkeitsbeiwert λ somit zu:

$$\lambda = \left[\int_0^1 f_1^m(\eta) d\eta \right]^{1/m} \quad (10)$$

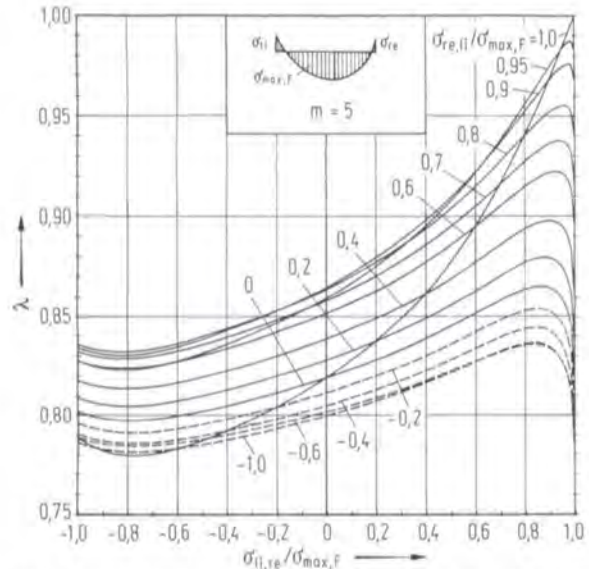


Bild 3. Völligkeitsbeiwert λ ; maximale Spannung im Feld ($m=5$)
Fig. 3. Fullness-parameter λ ; maximum stress occurring along the span ($m=5$)

Liegt die Stelle η_{max} der maximalen Feldspannung außerhalb des betrachteten Bereiches ($\eta < 0$ bzw. $\eta > 1$), oder ist $\sigma_{max,F}$ betragsmäßig kleiner als eine der beiden Randspannungen σ_{II} oder σ_{re} , so ergibt sich für Gl. (5):

$$\sigma(\eta) = \sigma_{R,2} \cdot \left[\frac{\sigma_{R,1}}{\sigma_{R,2}} + \left(1 - \frac{\sigma_{R,1}}{\sigma_{R,2}} \right) \cdot \eta + 4 \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_{R,2}} (\eta - \eta^2) \right] \quad (11)$$

bzw.

$$\sigma(\eta) = \sigma_{R,2} \cdot f_2(\eta) = \sigma_{max} \cdot f_2(\eta) \quad (12)$$

Hierbei bezeichnet $\sigma_{R,2}$ die betragsmäßig größte der beiden Randspannungen σ_{II} und σ_{re} .

Somit ergibt sich für den Fall, daß die größte Spannung am Rand auftritt, der Völligkeitsbeiwert λ zu:

$$\lambda = \left[\int_0^1 f_2^m(\eta) d\eta \right]^{1/m} \quad (13)$$

Da die Berechnung des Völligkeitsbeiwertes λ mit Hilfe von Gl. (10) bzw. Gl. (13) nur noch auf numerischem Wege möglich ist, muß ein bestimmter Wert für den Exponenten m angegeben werden.

Auf dem Gebiet des Ingenieurholzbaus beträgt bei Zug-, Querkzug- und Schubversuchen der Variationskoeffizient ungefähr $v \sim 0,25$ und bei Biegeversuchen ungefähr $v \sim 0,15$. Der Exponent der Weibull-Verteilung ist ausschließlich vom Variationskoeffizienten v abhängig, und nach Colling (1986) ergibt sich somit für Zug-, Querkzug- und Schubbeanspruchung der Exponent näherungsweise zu $m \geq 5$ und für Biegebeanspruchung zu $m \geq 8$. Der Fall der Druckbeanspruchung wird hier ganz bewußt ausgeklammert, weil durch das hierbei vorhandene plastische Bruchverhalten die Grundlage zur Anwendung der Weibull-Verteilung nicht gegeben ist. Für den Fall, daß die maximale Spannung im Feldbereich auftritt, ist Gl. (10) in den Bildern 3 und 4 für $m=5$ und $m=8$ dargestellt. Bei diesen Diagrammen ergibt sich für λ der gleiche Wert, egal, ob das Verhältnis $\sigma_{II}/\sigma_{max,F}$ an der Abszisse und $\sigma_{re}/\sigma_{max,F}$ in der Kurvenschar abgegriffen wird, oder umgekehrt.

Für den Fall, daß die betragsmäßig größte Spannung an einem der beiden Ränder auftritt, ist Gl. (13) in den Bildern 5 und 6 dargestellt.

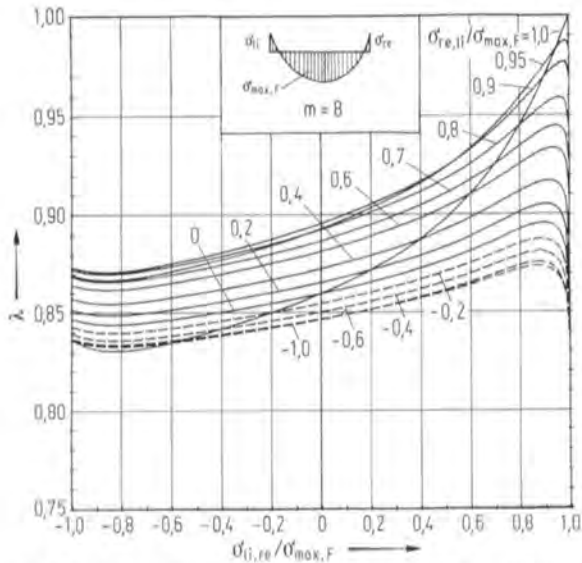


Bild 4. Volligkeitsbeiwert λ ; maximale Spannung im Feld ($m=8$)
Fig. 4. Fullness-parameter λ ; maximum stress occurring along the span ($m=8$)

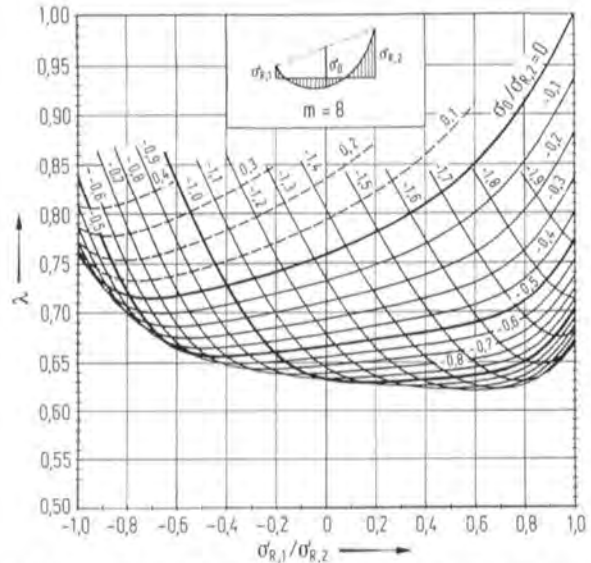


Bild 6. Volligkeitsbeiwert λ ; maximale Spannung am Rand ($m=8$)
Fig. 6. Fullness-parameter λ ; maximum stress occurring at an end of span ($m=8$)

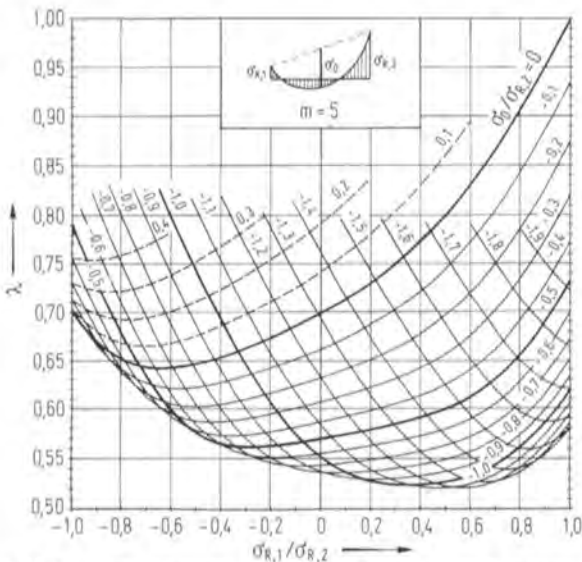


Bild 5. Volligkeitsbeiwert λ ; maximale Spannung am Rand ($m=5$)
Fig. 5. Fullness-parameter λ ; maximum stress occurring at an end of span ($m=5$)

Die Bestimmung des Volligkeitsbeiwertes λ mit Hilfe von Bild 3 bis 6 setzt voraus, daß die Spannungsverteilung über den gesamten Bereich mit Hilfe von Gl. (5) beschrieben werden kann. Kann die Verteilung jedoch nur abschnittsweise durch solch eine geschlossene Funktion beschrieben werden, so ergibt sich mit Hilfe von Gl. (4):

$$\lambda^m \cdot L = \sum \left(\frac{\sigma_{\max, i}}{\sigma_{\max}} \cdot \lambda_i \right)^m \cdot l_i \quad (14)$$

Hierbei sind l_i bzw. λ_i die Längen bzw. die Volligkeitsbeiwerte der jeweiligen Abschnitte, $\sigma_{\max, i}$ die im i -ten Abschnitt auftretende maximale Spannung und σ_{\max} die im gesamten Bereich (der Länge L) maximal vorhandene Spannung.

Der Volligkeitsbeiwert λ für den Bereich der Länge L ergibt sich somit zu

$$\lambda = \left[\sum \frac{l_i}{L} \left(\frac{\sigma_{\max, i}}{\sigma_{\max}} \cdot \lambda_i \right)^m \right]^{1/m} \quad (15)$$

Die Anwendung von Gl. (1) sowie die Bestimmung der Volligkeitsbeiwerte mit Hilfe von Bild 3 bis 6 bzw. Gl. (15) sollen nachstehend näher beschrieben werden.

3 Anwendungsbeispiele und Diskussion

Für den Fall eines Trägers mit Rechteckquerschnitt unter einachsiger Biegung gelten folgende Beziehungen:

$$\sigma_{B, \max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad (16)$$

und

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{A} \quad (17)$$

wobei das Widerstandsmoment W und die Querschnittsfläche A Konstanten sind, wenn es sich um einen Träger konstanter Höhe handelt. In diesem Fall entspricht das Verhältnis der Spannungen (Biege- oder Schubspannungen) dem Verhältnis der jeweiligen Schnittgrößen (Momente oder Querkräfte), so daß bei der Berechnung der Volligkeitsbeiwerte auf diese, zuletzt genannten Verhältniswerte zurückgegriffen werden kann.

In Bild 7 sind die Schnittgrößen und die Volligkeitsbeiwerte für 3 Träger mit unterschiedlicher Lagerung angegeben. Die zur Berechnung dieser Werte jeweils benötigten Gleichungen und Diagramme sind ebenfalls in Bild 7 angegeben.

Bei der Bestimmung des Volligkeitsbeiwertes $\lambda_{H, B}$ zur Berücksichtigung der Biegespannungsverteilung über die Trägerhöhe ist zu beachten, daß nur der Teil der Höhe in die Rechnung eingeht, der unter Zugbeanspruchung steht, da für den Fall der Druckbeanspruchung, wie bereits erwähnt, die hergeleiteten Gleichungen keine Gültigkeit besitzen.

Vergleicht man nun z. B. den Träger aus Beispiel 1 mit einem Träger gleichen Volumens, der einer konstanten Momentenbeanspruchung ausgesetzt ist (d. h. $\lambda_L = 1,0$), so ergibt sich mit Hilfe von Gl. (1):

$$\frac{\bar{\sigma}_{B, M = \text{konst.}}}{\bar{\sigma}_{B, 1}} = \frac{0,86}{1,0} \cdot \frac{0,70}{0,70} = 0,86,$$

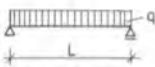
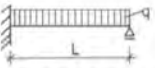
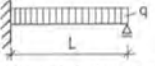
	Schnittgrößen							Völligkeitsbeiwerte			
	M_{li}	M_{re}	M_o s. Bild 2	η_{max} Gl. (6)	M_{max}^F Gl. (7)	Q_{li}	Q_{re}	$m = 8$		$m = 5$	
	$\times qL^2$	$\times qL^2$	$\times qL^2$		$\times qL^2$	$\times qL$	$\times qL$	$\lambda_{L,B}$	$\lambda_{H,B}$	$\lambda_{L,S}$	$\lambda_{H,S}$
Beispiel 1:  Einfeldträger mit konstanter Streckenlast q	0	0	1/8	0,500	1/8	1/2	1/2	0,86 Bild 1: ⑥ bzw. Bild 4		0,70 Bild 1: ④ bzw. Bild 5	
Beispiel 2:  Einseitig eingespannter Träger mit konstanter Streckenlast q	-1/8	0	1/8	0,625	9/128	5/8	-3/8	0,63 Bild 6	0,70 Bild 1: ② bzw. Bild 6	0,64 Bild 1: ④ bzw. Bild 5	0,82 Bild 1: ⑥ bzw. Bild 3
Beispiel 3:  Träger aus Beispiel 2 mit nachgiebiger Einspannung (Einspannmoment um 50% reduziert)	-1/16	0	1/8	0,5625	49/512	9/16	-7/16	0,845 Bild 4		0,65 Bild 1: ② bzw. Bild 5	

Bild 7. Schnittgrößen und Völligkeitsbeiwerte
Fig. 7. Bending moments, shear forces and fullness-parameters

d.h., die mittlere Biegefestigkeit eines mit konstantem Moment beanspruchten Trägers beträgt nur 86% der Festigkeit eines beidseitig gelenkig gelagerten Trägers mit konstanter Streckenlast (= parabelförmige Momentenverteilung).

Der Völligkeitsbeiwert für eine bestimmte Spannungsverteilung entspricht somit dem Verhältnis der mittleren Festigkeiten eines Trägers mit einer über den gesamten Bereich konstanten Beanspruchung und einem Träger mit eben dieser Spannungsverteilung. Wird ein großer Bereich des Trägers mit einer hohen Spannung beansprucht, so ergibt sich auch ein großer Völligkeitsbeiwert, weil man sich dem Fall der konstanten Beanspruchung annähert. Je völliger die Spannungsverteilung ist, desto größer ist auch der Völligkeitsbeiwert.

Um nur den Einfluß der Spannungsverteilung auf die Festigkeit zu untersuchen, soll im weiteren davon ausgegangen werden, daß die Träger aus den Beispielen 1 bis 3 alle die gleichen Abmessungen haben (d.h., $V_1 = V_2 = V_3$). Für das Verhältnis der Festigkeiten dieser Träger untereinander ergibt sich dann mit Hilfe von Gl. (1):

$$\frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{\sigma}_j} = \frac{\lambda_{L,j}}{\lambda_{L,i}} \cdot \frac{\lambda_{H,j}}{\lambda_{H,i}} \quad (18)$$

In Tabelle 1 sind diese Ergebnisse zusammengefaßt.

Aus Tabelle 1 geht hervor, daß der Träger 1 wegen der völligeren Biegespannungsverteilung nur 73% der Biegefestigkeit des Trägers aus Beispiel 2 besitzt. Die günstigere Spannungsverteilung von Träger 2 wird jedoch durch die nachgiebige Einspannung bei Träger 3 wieder „zunichte“ gemacht, so daß Träger 3 in etwa die gleiche Biegefestigkeit besitzt wie Träger 1.

Der Einfluß der Spannungsverteilung auf die Schubfestigkeiten ist in diesen Beispielen nicht so gravierend, weil sich die Querkraftverteilung nicht in dem Maße ändert, wie dies bei der Momentenverteilung der Fall ist.

Mit Hilfe von Gl. (16) bzw. Gl. (17) gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{\bar{\sigma}_{B,i}}{\bar{\sigma}_{B,j}} = \frac{M_{max,i}}{M_{max,j}} = \frac{k_{M,i} \cdot q_{max,i} \cdot L^2}{k_{M,j} \cdot q_{max,j} \cdot L^2} \quad (19)$$

bzw.

$$\frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_j} = \frac{Q_{max,i}}{Q_{max,j}} = \frac{k_{Q,i} \cdot q_{max,i} \cdot L}{k_{Q,j} \cdot q_{max,j} \cdot L} \quad (20)$$

Somit ergibt sich für das Verhältnis der maximalen Streckenlasten:

$$\frac{q_{max,i}}{q_{max,j}} = \frac{\bar{\sigma}_{B,i}}{\bar{\sigma}_{B,j}} \cdot \frac{k_{M,j}}{k_{M,i}} \quad (21)$$

bzw.

$$\frac{q_{max,i}}{q_{max,j}} = \frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_j} \cdot \frac{k_{Q,j}}{k_{Q,i}} \quad (22)$$

Tabelle 1. Verhältnis der Biege- bzw. Schubfestigkeiten für die Träger aus Beispiel 1 bis 3

j	i		i		i	
	Träger 1	Träger 2	Träger 2	Träger 3	Träger 3	Träger 1
	$\frac{\bar{\sigma}_{B,i}}{\bar{\sigma}_{B,j}}$	$\frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_j}$	$\frac{\bar{\sigma}_{B,i}}{\bar{\sigma}_{B,j}}$	$\frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_j}$	$\frac{\bar{\sigma}_{B,i}}{\bar{\sigma}_{B,j}}$	$\frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_j}$
Träger 1	1,0	1,0	1,37	1,09	1,02	1,08
Träger 2	0,73	0,91	1,0	1,0	0,75	0,98
Träger 3	0,98	0,93	1,34	1,02	1,0	1,0

Tabelle 2. Verhältnis der maximalen Streckenlasten für die Träger aus Beispiel 1 bis 3

j	i					
	Träger 1		Träger 2		Träger 3	
	$q_{\max,i}$	$q_{\max,i}$	$q_{\max,i}$	$q_{\max,i}$	$q_{\max,i}$	$q_{\max,i}$
	Gl.(21)	Gl.(22)	Gl.(21)	Gl.(22)	Gl.(21)	Gl.(22)
Träger 1	1,0	1,0	1,37	0,87	1,33	0,96
Träger 2	0,73	1,14	1,0	1,0	0,98	1,09
Träger 3	0,75	1,05	1,03	0,92	1,0	1,0

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind für die Träger aus Beispiel 1 bis 3 in Tabelle 2 angegeben. Die Werte für k_M bzw. k_Q wurden hierbei Bild 7 entnommen.

Wie aus Tabelle 2 hervorgeht, kann unter Berücksichtigung der ungünstigeren Biege-Spannungsverteilung bei Träger 1 im Mittel nur 73% der Streckenlast von Träger 2 aufgebracht werden, obwohl in beiden Fällen das gleiche maximale Moment ($M_{\max} = qL^2/8$) auftritt. Dieses Moment ist um 31% höher als bei Träger 3. Wegen der in etwa gleich großen Völligkeitsbeiwerte bei Träger 1 und 3 darf die maximale Streckenlast bei Träger 3 im Mittel um 33% höher sein als bei Träger 1.

Im Vergleich zu Träger 2 besitzt Träger 3 eine ungünstigere Spannungsverteilung, so daß trotz des kleineren Moments nur etwa die gleiche Streckenlast aufgebracht werden darf wie bei Träger 2: die nachgiebige Spannung bewirkt zwar eine Verkleinerung des maximalen Moments, die daraus entstehende völliger Spannungsverteilung macht diesen Vorteil jedoch wieder rückgängig.

Für den Fall der Schubfestigkeiten hat – wie bereits angedeutet – die Spannungsverteilung einen geringeren Einfluß, so daß die maximalen Streckenlasten zum größten Teil von der vorhandenen maximalen Querkraft bestimmt werden.

4 Schlußfolgerungen

Voraussetzung für das von Weibull (1939) entwickelte Bruchmodell des schwächsten Gliedes ist ein homogenes isotropes Material mit sprödem Bruchverhalten. Ergebnisse aus dem internationalen Versuchswesen haben jedoch gezeigt, daß Weibull's Theorie auch beim inhomogenen und anisotropen Werkstoff Holz anwendbar erscheint.

So konnte mit Hilfe der Weibull-Verteilung die Abnahme der Schubfestigkeit mit wachsendem Volumen und völligerer Spannungsverteilung beschrieben werden (Foschi, Barrett, 1976).

Auch die Volumenabhängigkeit der Querkzugfestigkeit (bei Prüfkörpern mit konstant verteilter Querkzugspannung)

konnte mit Hilfe von Weibull's Theorie erklärt werden (Barrett et al. 1975). Durch die zusätzliche Berücksichtigung einer nicht konstant (über das Volumen) verteilten Querkzugspannung erscheint es möglich, die in Versuchen festgestellte höhere Tragfähigkeit von gekrümmten Satteldachträgern gegenüber gekrümmten Trägern konstanter Höhe (Ehlbeck, Hemmer, 1985) auch theoretisch zu begründen.

Bei fehlerfreien Proben (Bohannon, 1966) und bei Bauholz (Fewell, Curry, 1983) konnte auch die Abhängigkeit der Biegefestigkeit vom Volumen mit Hilfe der Weibull-Verteilung beschrieben werden. Die Anwendbarkeit von Weibull's Theorie auf die Biegefestigkeit von Brettschichtholzträgern wird jedoch angezweifelt, nicht zuletzt wegen der vorhandenen Keilzinkenverbindungen, die eine zusätzliche Inhomogenisierung des Werkstoffes Holz darstellen.

Aus diesen Versuchsergebnissen geht hervor, daß auch beim Werkstoff Holz für einige Beanspruchungsarten eine Beziehung zwischen Festigkeit einerseits und Größe des beanspruchten Volumens und Spannungsverteilung andererseits besteht. Mit Weibull's Bruchmodell des schwächsten Gliedes ist – trotz Inhomogenität und Anisotropie – eine Möglichkeit gegeben, diese Abhängigkeit, zumindest näherungsweise, zu beschreiben.

5 Zusammenfassung

Auf der Grundlage der im ersten Teil dieser Veröffentlichungsreihe hergeleiteten Gleichungen wurden in diesem zweiten Teil Möglichkeiten zur Bestimmung der Völligkeitsbeiwerte angeboten. Die Anwendung dieser Diagramme wurde anhand von drei Beispielen näher erläutert. Diese Beispiele zeigten, daß nicht nur die Größe des beanspruchten Volumens einen Einfluß auf die Festigkeit eines Materials ausübt, sondern daß auch die Spannungsverteilung über dieses Volumen von großer Bedeutung ist.

6 Literatur

- Barrett, J. D.; Foschi, R. O.; Fox, S. P. 1975: Perpendicular-to-grain strength of Douglas-fir. *Canad. J. Civil Engin.* (1):50–57
- Bohannon, B. 1966: Effect of size on bending strength of wood members. U.S. Forest Service Research Paper, FPL 56
- Colling, F. 1986: Einfluß des Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit eines Rechteckträgers – Herleitung einer allgemeinen Beziehung mit Hilfe der 2-parametrischen Weibull-Verteilung. *Holz Roh- Werkstoff* 44:121–125
- Ehlbeck, H., Hemmer, K. 1985: Über die Tragfähigkeit gekrümmter Brettschichtholzträger. *Holz Roh- Werkstoff* 43:375–379
- Fewell, A. R.; Curry, W. T. 1983: Depth factor adjustment in the determination of characteristic bending stresses for visually stress-graded timber. *The Struct. Engin.* 61:35–40
- Foschi, R. O.; Barrett, J. D. 1976: Longitudinal shear strength of Douglas-fir. *Canad. J. Civil Engin.* (3): 198–208
- Weibull, W. 1939: A statistical theory of the strength of materials. *Ing. Vetensk. Akad. Handl. No. 151*